SS-053

変化をとらえるダイナミカルシステムアプローチ

愛知学院大学心身科学部
千野　直仁

平成３０年９月２６日（水）15:30~17:30

日本心理学会第８２回大会　仙台国際センター

発表要旨

複数の対象相互の関係の有無や方向性を図式化する方法としてよく知られているものにダイグラフ（digraph, or directed graph）がある。これに各関係の強さを重みとして加えたものは重み付きダイグラフ （weighted digraph） と呼ばれる。従来、両者はグラフ理論の中では相対的には内外とも研究は少ない。今回筆者が発表する力学的重み付きダイグラフ（dynamic weighted digraph）の初等理論は、重み付きダイグラフにおける対象相互の非対称な相互作用による同グラフの時間変化のパターンの理論的分類に関するもので、心理学における対人的相互作用の分類と制御、国際貿易における貿易量のインバランスの分類と制御、ニューラルネットワークにおける相互作用の分類と制御、最新の話題である臓器間コミュニケーションの分類と制御などへの応用が期待できる。このモデルは非線形差分方程式を基本モデルとしており、2者関係（dyadic relation）でさえ、理論的にはカオスもありうることを示す。

この原稿は、今年の日本行動計量学会第４６回大会、慶応大学（平成３０年９月３日～６日）で千野が配布した配布資料
“Dynamical scenarios of changes in asymmetric relationships on a Hilbert space” を和訳し、一般向けに追加・修正したものである。

1. 問題

最初に、特別な行列 $W_3 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ を取り上げる。この行列は（３次の）**魔法陣**（*magic square* of order 3）と呼ばれる。もしわれわれがこの行列を**有向グラフ**または**ダイグラフ**（digraph、あるいは directed graph）に対応する**重み行列**（weight matrix）と考えるならば、そのような有向グラフは例えば MATLAB を使って次のように描ける：

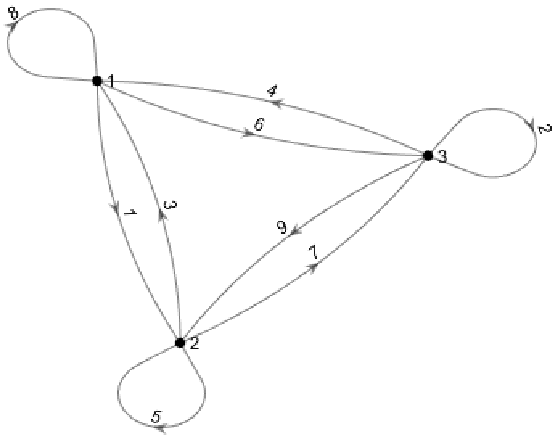

Figure 1. The digraph associated with the weight matrix W_3.

つぎに、**重み付き有向グラフ**（weighted digraph）とはある特定の時点における有向グラフで、各**ノード**（nodes, or vertices）、アーク（arc）、および**ループ**（loop）のそれぞれに重みを付与したものである。

非対称多次元尺度構成法（以降、**非対称 MDS** と略す）（例えば、千野、2014; Chino, 2014）では、ノードはあるグループの**成員**に対応し、各アークおよびループの重みは**親近度行列**（proximity matrix）の要素である**（対称、非対称 MDS の説明―付録３）**。

なお、非対称 MDS や伝統的な対称 MDS では、親近度行列という言葉よりは**類似度行列**（similarity matrix）という言葉をよく使うが、この発表では、あえて similarity という言葉を避けて、proximity とする。

その理由は、この発表で取り上げる力学系とりわけ**複素力学系**（complex dynamical system）では、**自己相似性**（self-similarity）なる概念が重要であり、非対称 MDS における**自己類似度**（self-similarity）と重複するためである。

さて、われわれが提案する「**力動的重み付き有向グラフ**」（***dynamic weighted digraph***）の初等理論では、（有向グラフの）重み行列の各要素は任意の時点でのノード間の親近度の強さを表し、それは時間とともに変化する、と仮定する。

この時、千野・白岩のエルミート形式モデル（the Hermitian Form Model、略し

て **HFM**) (Chino & Shiraiwa, 1993) をある時点で得られる重み行列に対して適用すれば、その時点での対象間（ノード間）の**布置**（configuration of objects (nodes)) を得ることができる（**エルミート行列の説明、付録２**)。

ここで、布置とは計量心理学の分野では一般に複数の対象を多次元空間上の点として位置付けたものを指す。われわれのエルミート形式モデル HFM では、この多次元空間は一般的には **p-次元ヒルベルト空間**（*p*-dimensional Hilbert space）H^p か**不定計量空間**（indefinite metric space)である。以降、p-次元ヒルベルト空間を単にヒルベルト空間と、p=1 の時は、**１次元ヒルベルト空間**（これは、**複素平面** C と同等)と呼ぶ。

この発表を通じて、上記重み行列（正確には、重み行列そのものではなく、これをエルミート化した**エルミート行列**（Hermitian Matrix)）は**正の半定符号** (positive semi-definite)（このことは、行列の固有値がすべてゼロ以上のような行列をいう）である。また、重み行列の各要素、すなわち重みは**比尺度のレベルで測られている**（measured at a ratio level）とする。ここで、**エルミート行列の正の半定符号の条件はわれわれが HFM を用いて複数の対象（ノード）を埋め込む時、埋め込むべき空間がヒルベルト空間であるためのもの**である。そこで、この条件が成り立たないと、埋め込み空間は不定計量空間となるが、その場合でも１次元のみ考えるならば、不定計量空間のある次元に対応する固有値が負の場合、符号を反転すれば、１次元ヒルベルト空間 H とみなすことができる点に注意しよう。

この時、任意の時点における有向グラフ、重み行列、ヒルベルト空間上の布置の間にはつぎのような対応関係があることがわかる：

有向グラフ ⇔ 重み行列 ⇔ ヒルベルト空間上の布置,

その結果、**有向グラフの時間変化はヒルベルト空間上でのノード（複数）の布置の変化とみなせる。**

つぎに、有向グラフの力動的（力学的）時間変化を扱った文献を振り返ると、大きく２種類に分類できる。１つは、**微分方程式モデル**（differential equation model) であり、他方は**差分方程式モデル**（difference equation model）である。

例えば、McCann et al. (1998）は、食物網（food web）に関する興味深い非線形**微分**方程式モデルを提案している。彼らは、食物網として頂点（最上位）捕食者 (top predator)、資源種（resource species)、および１種か２種の消費種（consumer species）間の相互作用を検討した。その結果、系の分岐パラメータ（bifurcation parameters）としての種間相互作用強度の変化に伴い、カオスが出現することを示している（**付録１の（１）参照)**。

これに対して、Chesson and Warner (1981）は、生物の多種が特定の場所で共存する機構の説明モデルとしてくじ引きモデル（lottery model）として、各種の個体

数についての非線形差分方程式系を提案している。その結果、環境の多様性が大きいほど、２種の個体は共存することを示している。

また、人工ニューラルネットワークモデル（artificial neural network model）では、各種の再帰型ニューラルネットワークモデル（recurrent neural network model）などが知られている（付録１の（２）、（３）参照）。

一方、われわれの提案する力動的有向グラフの初等理論では、有向グラフの力動的（力学的）時間変化はヒルベルト空間上の**複素非線形差分方程式**（complex nonlinear difference equation）で表されるとみなされる。

同初等理論の目的は、有向グラフで表される（複数の）ノードの相互作用による力動的（力学的）時間変化を支配している**潜在過程**（latent process）を仮定し、複数のノードのヒルベルト空間上での動きを**一組の複素非線形差分方程式系**（a set of complex nonlinear difference equations in H）により記述することである。

なお、われわれの扱う非線形差分方程式と従来の多くの同方程式系との違いは、従来の同方程式系では特定の現象に対する特定の非線形系をあてて分析することが多いのに対して、われわれの扱う非線形系はかなり一般的な多項式系であることである。さらに、従来の非線形差分系ではほとんどの場合**実差分力学系**が用いられているが、われわれの非線形差分系は**複素差分力学系**を用いている点が対照的である。

2. 力動的重み付き有向グラフの初等理論

われわれのモデルでは、N 個のノードの相互作用による時間変化はヒルベルト空間上のつぎの複素差分方程式系によって記述される、と仮定する：

$$\boldsymbol{z}_{j,n+1} = \boldsymbol{z}_{j,n} + \sum_{m=1}^{q} \sum_{k \neq j}^{N} \boldsymbol{D}_{jk}^{(m)} \boldsymbol{f}^{(m)}\left(\boldsymbol{z}_{j,n} - \boldsymbol{z}_{k,n}\right) + \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{u}_{j,n}\right) + \boldsymbol{z}_0, \qquad (1)$$

ここで、添字 j と k は 1 から N にわたり、n は（差分方程式の）反復数を指す。

また、上式の右辺の $\boldsymbol{D}_{jk}^{(m)} = diag\left(\alpha_{jk}^{(1,m)}, \alpha_{jk}^{(2,m)}, \dots, \alpha_{jk}^{(p,m)}\right)$ は (1)式の係数行列であり、のちに示すように、この系におけるノード間の**相互作用行列**（mutual interaction matrix）にかかわり、潜在空間上の（複数の）ノードの位置の変化の規定因である。このモデルでは、この相互作用行列は時間を超えて不変であると仮定する。

いずれにせよ、このモデルによれば、ノード j の n+1 回目の反復におけるヒルベルト空間上の座標値（ベクトル）は、そのノードの n 回目の反復時の座標値に n 回目の反復時のノード j と k の座標値の差の q 次の多項式と制御項 g 及びそのノードの初期座標値を加えたものである。

手短に言えば、(1) 式はヒルベルト空間上のそれぞれのノードに働く力が主として

ノード間の位置座標の差の多項式関数で与えられることを意味する。

この式をニュートンの運動の第２法則、すなわち F=ma と対比してみよう。同法則のもとでは、惑星に働く力は３次元ユークリッド空間上の惑星の座標値の時間に関する２次微分（second derivatives）に比例する。言い換えれば、惑星に働く力はユークリッド空間上でのその座標値の位置変化の変化率に比例するというものであり、筆者の提案するモデルとは異なる。

われわれの提案するモデルは、ある程度の一般性を持っており、例えば、国家間の国際貿易システム、ニューラルネットワークシステム、あるいは最近医学の分野で注目を集めている臓器間コミュニケーションネットワークシステム、さらには多くの社会行動科学的ネットワークシステムなどに適用できるかもしれない。実際、我々は既

Table 1.　Asymmetric relational data matrix among four countries, Japan, Amerika, China, and Russia in 2015, which was reproduced from the figure appeared in elsewhere (Asahi Newspaper, 2015).

	J.　Japan	A.　America	C.　China	R.　Russia
J.　Japan	43,480	1,382	1,200	55
A.　America	736	189,592	1,161	71
B.　China	1,764	4,832	119,684	348
R.　Russia	173	146	333	13,755

に前２者について実際のデータに対してこのモデルを適用している（Chino, 2017b）。例えば、Table 1 は、朝日新聞に掲載された日本、アメリカ、中国、ロシア間の 2015 年度の貿易量についての非対称な関係を表す行列である。この行列は、前節で述べた有向グラフに対応する重み行列であり、非対称 MDS の文脈では、国家間の貿易量を指標とする観測親近度行列である。

この時点での重み行列には有向グラフが対応していることに注意しよう。また、この行列に対して千野・白岩のエルミート形式モデルを適用すると、観測時点での４か国間のヒルベルト空間上の布置が計算できる。この布置が得られたら、つぎに仮説的な４か国間の相互作用行列をいろいろ変えて上記 (1)式のモデルを適用すれば、４か国に対応するノードの布置の時間変化のいろいろなシナリオ、すなわち４か国のヒルベルト空間上での（位置の変化に関する）解軌道の特徴を分析することが可能となる。Fig. 2 は、相互作用行列を特定化した場合の４か国の一次元ヒルベルト空間上での解軌道を示す。このシナリオでは、４か国間の貿易のゆがみはすべて解消する（すなわち、解軌道は時間とともに１点に収束する）。

われわれの初頭理論の目的は２つある。１つは理論的、他方は実用的である。理論的な目的のためには、われわれは複数のノードの初期布置を設定することにより、相互作用行列を仮定した (1) 式を用いて（複数の）ノードの解軌道を計算する。最後に、

複数の相互作用行列を変えて得られる複数の解軌道を考察することにより、われわれは有向グラフの時間変化のパターンを分類する。一方、実用的な目的のためには、われわれは最初に、初期重み行列としての任意時点のノード間の親近度行列を観測する。

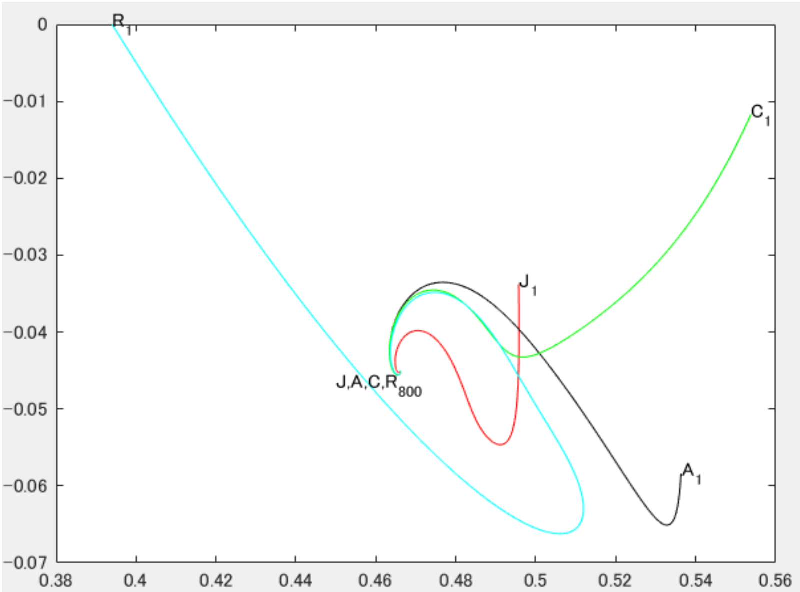

Figure. 2. Trajectories of the four nations, Japan, Amerika, China, and Russia after 800 iterations of Model IV of the complex *linear* difference equation model, $\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{A}_4 \boldsymbol{z}_n$ where $\boldsymbol{A}_4$ is the weight matrix of order 4 which is similar to $\boldsymbol{A}_3$ in Eq. (7), and its weights are $\alpha_{jk} = -0.01(1-i)$, $\alpha_{jm} = \alpha_{km} = \alpha_{jl} = \alpha_{kl} = \alpha_{lm}$ $= 0.01(1-i)$, $\alpha_{kj} = \alpha_{mj} = \alpha_{mk} = \alpha_{lj} = \alpha_{lk} = \alpha_{ml} = -0.02(1-i)$. In this case, eigenvalues of $\boldsymbol{A}_4$ are 1.0, 0.9950, 0.9901, and 0.9754.

Chino (2017a, b) では、(1) 式のモデルで p=1、m=1、N=2 の場合についての幾つかの理論的な検討を行っており、それらを要約すると次のようになる：

この場合、(1) 式はつぎのように書ける：

$$\begin{cases} z_{j,n+1} = z_{jn} + \alpha_{jk}\left(z_{jn} - z_{kn}\right) \\ z_{k,n+1} = z_{kn} + \alpha_{kj}\left(z_{kn} - z_{jn}\right) \end{cases}, \tag{2}$$

(2) 式を行列表現すると、$\boldsymbol{z}_n = \left(z_{jn}, z_{kn}\right)^t$ と置けば、つぎのように書ける：

$$\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{z}_n, \quad \text{ここで} \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1+\alpha_{jk} & -\alpha_{jk} \\ -\alpha_{kj} & 1+\alpha_{kj} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

われわれは、行列 $\boldsymbol{A}_2$ を２者関係における相互作用行列と呼ぶ。行列 $\boldsymbol{A}_2$ の固有値は $1+\alpha_{jk}+\alpha_{kj}$ と 1 である。

同様に、もし p=1、m=1 で N=3 の場合は、(1)式はつぎのように書ける：

$$\begin{cases} z_{j,n+1} = z_{jn} + \alpha_{jk}\left(z_{jn} - z_{kn}\right) + \alpha_{jl}\left(z_{jn} - z_{ln}\right) \\ z_{k,n+1} = z_{kn} + \alpha_{kl}\left(z_{kn} - z_{ln}\right) + \alpha_{kj}\left(z_{kn} - z_{jn}\right). \\ z_{l,n+1} = z_{ln} + \alpha_{lj}\left(z_{ln} - z_{jn}\right) + \alpha_{lk}\left(z_{ln} - z_{kn}\right) \end{cases} \quad (4)$$

$\boldsymbol{z}_n = \left(z_{jn}, z_{kn}, z_{ln}\right)^t$ と置けば、(4)式はつぎのように書ける：

$$\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{z}_n, \quad (5)$$

ここで、 $\boldsymbol{A_3} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_{jk}+\alpha_{jl} & -\alpha_{jk} & -\alpha_{jl} \\ -\alpha_{kj} & 1+\alpha_{kl}+\alpha_{kj} & -\alpha_{kl} \\ -\alpha_{lj} & -\alpha_{lk} & 1+\alpha_{lj}+\alpha_{lk} \end{pmatrix}.$

行列 $\boldsymbol{A}_3$ は**3者関係における相互作用行列**である。

行列 $\boldsymbol{A}_2$ や $\boldsymbol{A}_3$ はわれわれのモデルの相互作用行列の特別なケースである。Chino (2017a, b; 2018) で指摘するように、**相互作用行列の固有値のパターンが（複数の）ノードの解軌道の時間変化のパターンを決定する**。

例えば、(3) 式で記述される2者関係の線形差分方程式の解曲線の力動的（力学的）シナリオは、相互作用行列の固有値の1つである $1+\alpha_{jk}+\alpha_{kj}$ の絶対値により、つぎの3つのパターンを取る（Chino, 2017）：

$$\begin{cases} \text{発散}, & if\ \left|1+\alpha_{jk}+\alpha_{kj}\right| > 1 \\ \text{直線上を発散}, & if\ \left|1+\alpha_{jk}+\alpha_{kj}\right| = 1 \\ \text{収束}, & if\ \left|1+\alpha_{jk}+\alpha_{kj}\right| < 1 \end{cases}.$$

Fig. 3 は解曲線が収束する場合のヒルベルト空間 H 上の2者（2つのノード）の解軌道を示す。

同様に、(5)式で記述される3者間の線形差分方程式系の力動的シナリオは、相互作用行列 $\boldsymbol{A}_3$ の固有値（1つは必ず1となる）のうち、$\lambda_1=1$ を除く2つの固有値 λ_2, λ_3 により、おおざっぱには4つのパターンを持つ。ここで、λ_2, λ_3 は、$1+\frac{1}{2}\sum_{g\neq h}^{3}\sum_{h}^{3}\alpha_{gh} \pm \sqrt{D}$ のように書ける。ここで、D は $\alpha_{gh}'s$ の特別な2次関数である。

Fig. 4 は、相互作用行列をつぎの (6) 式のように特定化した場合の (5) 式の解軌道を示す。ここで、この行列に対応する3者の初期布置は三すくみ（tripartite deadlock）とした。

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1, & 0.01(1-i), & -0.01(1-i) \\ 0.02(1-i), & 1, & -0.01(1-i) \\ 0.02(1-i), & 0.02(1-i), & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

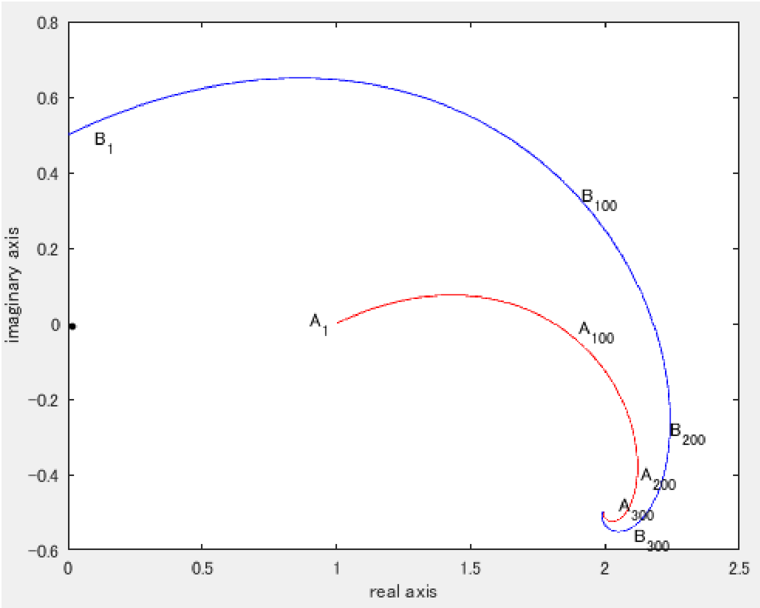

Figure. 3. Trajectories of two members j (=A) and k (=B) on the complex plane in the special case when $\alpha_{jk} = 0.01(1+i)$, $\alpha_{kj} = -0.02(1+i)$. This figure was repro-duced from Figure 2-3 in Chino (2017a) as well as Figure 7 in Chino (2018).

この行列の固有値は、1 と、0.98+0.02i 及び 0.97+0.03i であるため、この系の 3 つのノードのヒルベルト空間上の解軌道はすべて一点に収束することが、Fig. 4 からもわかる。収束点の推定値は 1+0.5774i である。

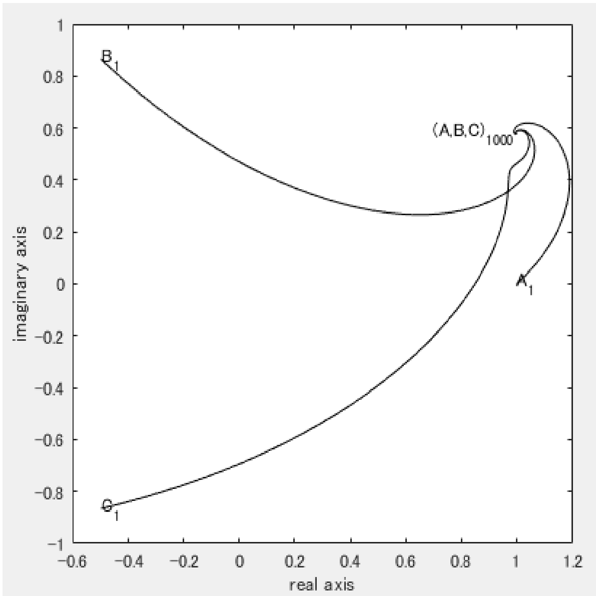

Figure 4. Trajectories of Eq. (4) with a special case of $\boldsymbol{A}_3$. This figure was reproduced from Figure 7-4 in Chino (2017a) as well as Figure 11 in Chino (2018).

Fig. 4 の解軌道上の３つのノードのスナップ写真を時点 n=1, 20, 60, 1000 の４か所で撮ると、これらの時点におけるノードの布置を得ることができる。これを示したのが Fig. 5 である。

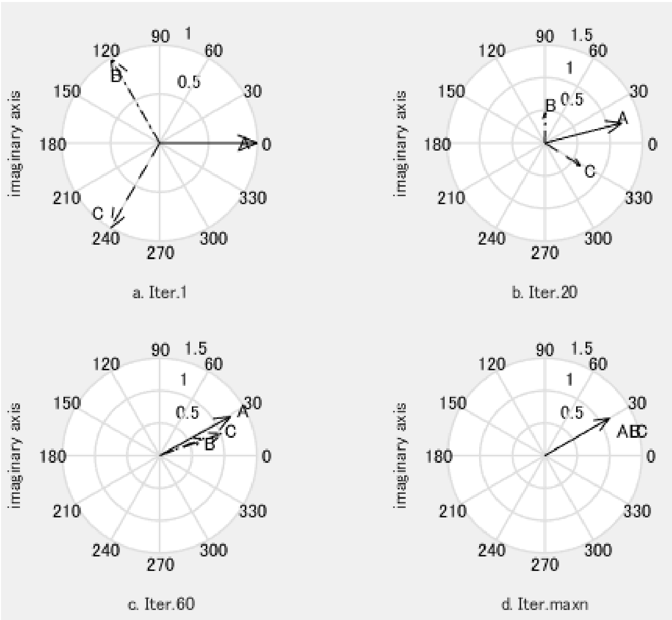

Figure 5. Configurations of nodes as snapshots of their trajectories.

ここでさらに、Fig. 5 の３つのノードの４時点の布置から、対応する重み付き有効グラフを得ることができる。これを行うためには、われわれはノード間の重み行列（非対称 MDS の文脈では親近度行列）の各要素 s_{jk}（これは実数で、有向グラフの文脈では w_{jk}）と各ノードの座標値 $\boldsymbol{v_j}$（これは複素ベクトルで、有向グラフの文脈では $\boldsymbol{z_j}$）を結びつけるエルミート形式モデルの公式 （Chino & Shiraiwa, 1993）を適用する必要がある。すなわち、i を純虚数（pure imaginary number）として、

$$s_{jk} = -\frac{1}{2}\left\{\left\|\boldsymbol{v_j} - \boldsymbol{v_k}\right\|^2 + \left\|\boldsymbol{v_j} - i\boldsymbol{v_k}\right\|^2\right\} + \left(\left\|\boldsymbol{v_j}\right\|^2 + \|\boldsymbol{v_k}\|^2\right). \qquad (7)$$

Fig. 6 は、これにより得られた４つの有向グラフを示す。この図の最後の有向グラフでは、各ノードの自己親近度のみならずノード間親近度がすべて同一の値となっていることに注意したい。そのような結果は、(7) 式に$\boldsymbol{v_j} = \boldsymbol{v_k}$ を代入すればわかる。

この図は、われわれの研究の主題である力動的（力学的）重み付き有向グラフ、すなわち重み付き有向グラフが、その背後にあると想定されるノード間相互作用を記述するヒルベルト空間上の非線形力学系によりダイナミックに変化するシナリオの例を示すものである。

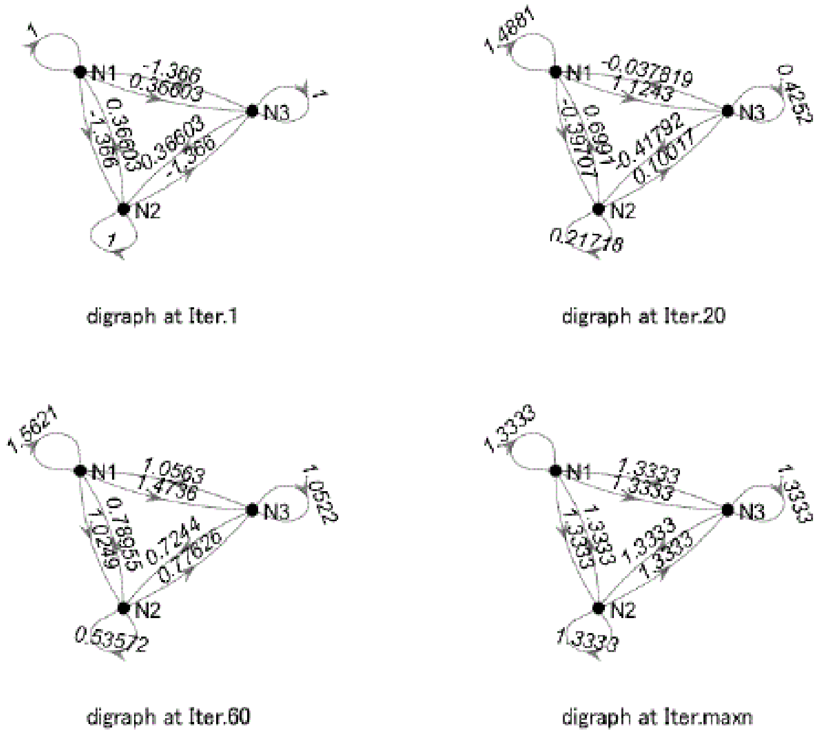

Figure 6. Digraphs reproduced from the trajectories of Fig.2.

3. 潜在力学系が二次の項を含む時の力動的重み付き有向グラフ

Chino (2017a, 2018)では、(1) 式で記述されるわれわれの差分方程式モデルで、N=2 で q=2 の場合を若干考察した。この場合、モデルはつぎのように書ける：

$$\begin{cases} z_{j,n+1} = z_{jn} + \alpha_{jk}^{(1)}\left(z_{jn} - z_{kn}\right) + \alpha_{jk}^{(2)}\left(z_{jn} - z_{kn}\right)^2, \\ z_{k,n+1} = z_{kn} + \alpha_{kj}^{(1)}\left(z_{kn} - z_{jn}\right) + \alpha_{kj}^{(2)}\left(z_{kn} - z_{jn}\right)^2. \end{cases} \tag{8}$$

そこでも議論したように、この種の系は、その解軌道を分類するに際して、数学の分野で開発された複素力学系（complex dynamical system）の理論（例えば、Milnor, 2000; 上田ら、1995）を直接使えるという大変望ましい性質を持っている。

実際、上式に対して新たな変数 $u_{jkn} = z_{jn} - z_{kn}$ を定義し、それを線形的に変換すると、われわれは次式を得る：

$$Z_{jk,n+1} = Z_{jk,n}^2 + \gamma_{jk}^{(1)}, \tag{9}$$

ここで、 $\gamma_{jk}^{(1)} = \frac{1}{2}\beta_{jk}^{(1)} - \frac{1}{4}\left[\beta_{jk}^{(1)}\right]^2$， また $\beta_{jk}^{(1)} = 1 + \alpha_{jk}^{(1)} + \alpha_{kj}^{(1)}$.

(9) 式は $\gamma_{jk}^{(1)}$ の値によっては、マンデルブロー集合 (Mandelbrot set) (Mandelbrot, 1977) となる。例えば、$\gamma_{jk}^{(1)} = 0.25$ の時は、(9) 式はマンデルブロー集合に含まれ、対応する解軌道は後続の Fig. 7 に示すように**カリフラワー集合** (cauliflower set) として知られている。

Chino (2017a, 2018) が指摘しているように、Z_{jkn} の力動的シナリオを調べるに際して、われわれは複素力学系のいろいろな理論的な結果を利用できる。それらのうちのキーとなる語句は、**固定点** (fixed point)、**周期点**（あるいは**軌道**）(periodic point (orbit)、それらの点の**乗法因子** (multiplier of these points)、及び**ジュリア集合** (Julia set)、**ファトウ集合** (Fatou set) などである（例えば、Carleson & Gamelin, 1993)。

第１に、固定点とその乗法因子は、つぎのように定義される：
まず、f は**正則関数** (holomorphic function)、すなわち複素空間上での**解析関数** (analytic function) であるとする。この時、

$$z_f \text{ は、 } \mathrm{f}(z_f) = z_f,$$

ならば固定点と呼ばれる。さらに、固定点の乗法因子とは、

$$\lambda = \mathrm{f}'(z_f),$$

なる λ を指す。ここで、f′ は関数 f の z_f についての**一次微分** (the first derivative) である。

第２に、乗法因子は固定点の特性をつぎのように決定する (e.g., Carleson & Gamelin, 1993, p.27):

(1) もし $|\lambda| < 1$ ならば、**吸引的** (attracting). (もし $\lambda = 0$ ならば、**超吸引的固定点** (superattracting fixed point) と呼ぶ)。
(2) もし $|\lambda| > 1$ ならば、**反発的** (repelling) 。
(3) もし $|\lambda| = 1$ かつある整数 n に対して $\lambda^n = 1$ ならば、**有理的に中性** (rationally neutral)
(4) もし $|\lambda| = 1$ かつ $\lambda^n \neq 1$ ならば、**無理的に中性** (irrationally neutral)

なお、ここでのマンデルブロー集合の可能性のある関数 f は、

$$\mathrm{f}(z) = z^2 + c, \tag{10}$$

第３に、周期点とそれらの乗法因子についてはつぎのように定義される (e.g., Milnor, 2000)：

周期軌道あるいはサイクルは、正則関数 f について、つぎのような関数をいう：

$$\text{f}: z_0 \mapsto z_1 \mapsto \cdots \mapsto z_{m-1} \mapsto z_m = z_0, \tag{11}$$

つぎに、**（周期）軌道の乗法因子**（multiplier λ of the orbit）とは、当該周期点における m 重反復関数（m-fold iterate）$f^{\circ m}$ の一次微分で、

$$\lambda = (f^{\circ m})'^{(z_i)} = \text{f}'(z_1) \cdot \text{f}'(z_2) \cdot \ldots \cdot \text{f}'(z_m) \cdot \tag{12}$$

上述のカリフラワー集合の場合、c=0.25 で、ジュリア集合上のいくつかの点が**放物的固定点**（parabolic fixed points）、**周期２の反発的周期点**（repelling periodic points of period 2）、**周期３の反発的周期点**（repelling periodic points of period 3）として求めることができる（Fig. 6)。

この時点で、伝統的な数学の分野で開発された複素力学系の主要な関心は、系の固定点や周期点の局所的な定性的振る舞いをこれらの点の乗法因子を用いて検討することにある点に注意が必要である。

これに対して、われわれの複数のノード間の相互作用を仮定した複素差分系の初等理論の主要な関心は、個々のノードの固定点や周期点の定性的振る舞いのみではなく、複数のノードのヒルベルト空間上での大局的な定性的振る舞いにもある点が対照的である。**このような大局的な振る舞いは、局所的な点の振る舞いを検討する乗法因子のみでは十分検討することはできない。**

これを行う１つの方法は、２者関係系のリアプノフ指数（Lyapunov exponent）を検討することであろう。

いずれにせよ、われわれは（9）式で記述される線形化された系の定性的振る舞いが単純な、２者関係の系のシミュレーションから始める。そのような系は、(9) 式の $\gamma_{jk}^{(1)}$ が０となるような、（8）式に記した２次元２次系である。この条件を満たす１つの系としてつぎの場合を考えてみよう：

$$\alpha_{jk}^{(1)} = 0.9564i, \quad \alpha_{kj}^{(1)} = -1 - 0.9564i, \quad \alpha_{jk}^{(2)} = 0.01, \quad \alpha_{kj}^{(2)} = 1.5375 - 0.9564i.$$

この時、$\gamma_{jk}^{(1)} = 0$ なる（9）式の系は、ジュリア集合が複素平面 C（したがって、１次元ヒルベルト空間）上で原点を中心に持つ単位円（unit circle）であることが知られている（例えば、上田ら, 1995)。さらに、この系は２つの固定点１及び０（つまり、共に複素平面上の実軸上の点）を持ち、１つは反発的固定点、他方は超吸引的固定点

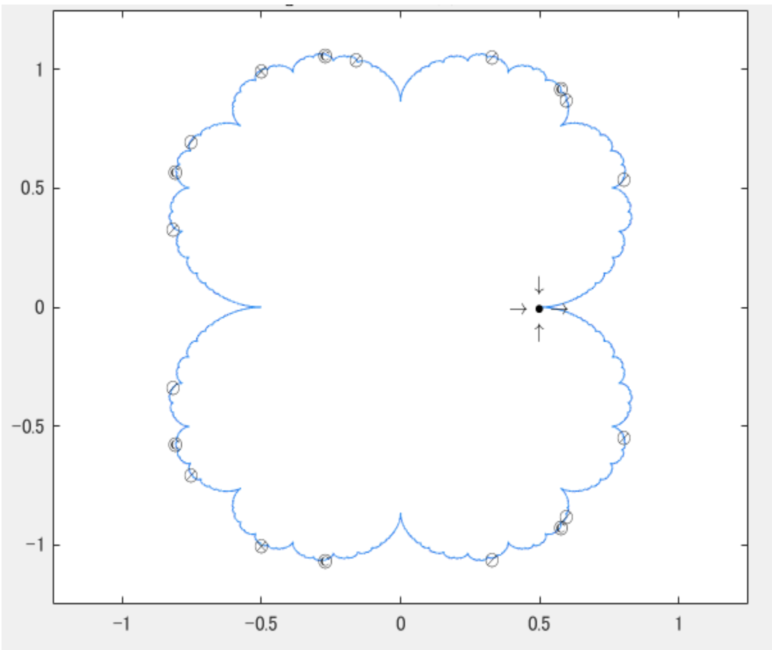

Figure 7. Julia set for $Z_{jk,n+1} = Z_{jk,n}^2 + 0.25$ with a *parabolic fixed point* (0.5), two repelling periodic points of period 2 ($-0.5 \pm i$), and six repelling periodic points of period 3 with the © mark, and twelve repelling periodic points of three 4-sycles. This figure was reproduced from Figure 11-1 in Chino (2017a) as well as Figure 1 in Chino (2018).

である。

その結果、もしわれわれがこの系の初期値として単位円周上の任意の点から出発するとすれば、解軌道は少なくとも理論的には単位円周上をカオス的に移動する（ただし、この場合ジュリア集合としてのこの円は自己相似性が成り立っていないので、フラクタルではない）。そこで、この系の解の振る舞いを検討するために、初期点としては敢えて上記２つの固定点は避けて、C 上の i （すなわち、虚軸上の点を選ぶことにする。

しかし、われわれがどのような精度の固定小数点形式を選択しようとも、計算機の丸目の誤差を避けることは不可能なので、初期値を i に取る実際の解軌道もおよそ５０回の反復を超えないところで、単位円周上から脱線する。この系の固定点の特徴から、そのような場合、軌道は原点に存在する超吸引的固定点に吸引されてしまう。Fig. 8 は横軸に反復回数、縦軸に (9) 式の $Z_{jk,n}$ の絶対値を取ったもので、これを見ると、$Z_{jk,n}$ の絶対値は５０回ぐらいの反復で急速にゼロに落ちていくことが見て取れる。

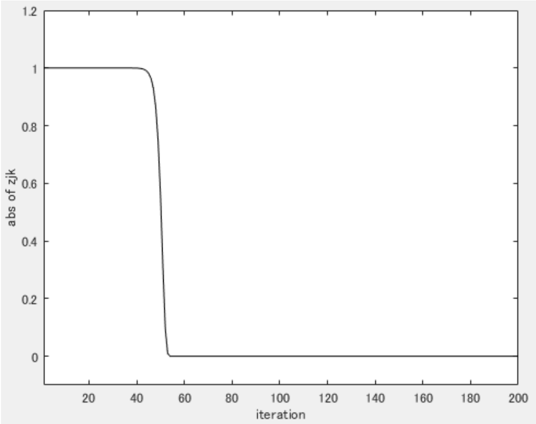

Figure 8. Change in absolute value of the linearized system, $Z_{jk,n+1} = {Z_{jk,n}}^2$ with $Z_{jk,1} = i$ in C.

このような場合、しかしながら、われわれはそのような脱線を避けることが可能である。というのは、この系はたまたまそのジュリア集合である単位円は数学的に簡単な陽な表現を持つからである。つまり、もし解軌道が単位円周上から脱線したら、そのたびに我々はその時の C 上の座標値を単位円周上に引き戻すように修正すればよい。Fig. 9 はこのようにして修正した後の 100 回の反復後の解軌道を、Fig. 10 は 10,000 回の反復後の解軌道を示したものである。Fig. 10 の解軌道を Fig. 9 の解軌道と比較すると、**反復を重ねていくとこの系の解軌道の動きはカオティックになり、次第に単位円盤（unit disk）上を埋め尽くしていくことがわかる。ただし、Fig. 9 も Fig.10 も、あくまでもこの系の解軌道そのものではないこと**に注意が必要である。解軌道はあくまでも単位円周上をカオティックに動いていくのみである。ここで、この一次元系 $Z_{jk,n+1} = {Z_{jk,n}}^2$ のリアプノフ指数は厳密解が簡単に求まり $\lambda = ln\ 2 =$ 0.69314718… となるので、この系はカオスであることが確かめられる。

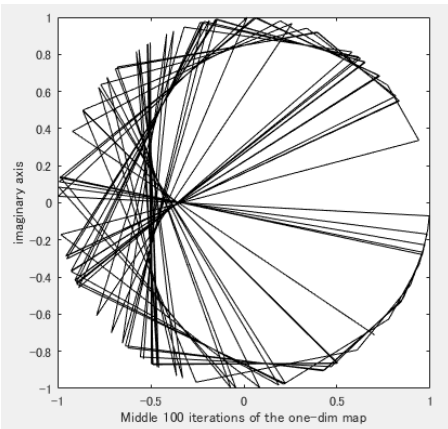

Figure 9. Revised trajectory with initial value *i* in C after 100 iterations.

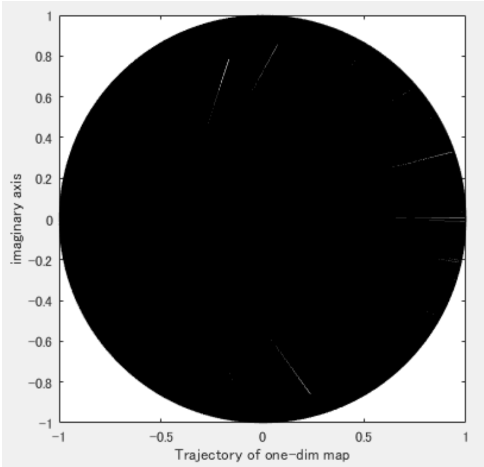

Figure 10.　Revised trajectory with initial value *i* in C after 1000 iterations.

つぎに、上記の系のもとになる（8）式の２者関係の２次元系の振る舞いを検討することとする。Fig. 11 は、順に、もとの２次元系の１０万回の反復後の２つのノードのそれぞれの**自己親近度**（ヒルベルト空間上の原点からの各ノード自身の親近度）、**ノード間親近度**（この場合、ノード A からノード B への親近度）、及びノード間のヒルベルト空間上での角度（正確には、ノード A からノード B への角度）を縦軸にとり、横軸に反復回数を取ってプロットしたものである。

つぎに、われわれはこの２者関係の２次元系の最大リアプノフ指数を計算し、反復回数を横軸に取りプロットした（２次元系なので、リアプノフ指数は２つ存在することに注意）。Fig. 12 はこれを示す。最大リアプノフ指数は、およそ 0.693147148… に収束しており、この値は、この系を線形化して得られる系のリアプノフ指数に等しいとみてよかろう。**明らかに、２者関係の２次元系も、線形化された１次元系と同様、（最大リアプノフ指数が正なので）カオスとなっている**ことがわかる。

ここで、Fig. 11 の解軌道をズームアップして、解軌道の特徴をより詳しく調べてみよう。例えば、Fig. 13 は Fig. 10-c の１０万回のノード A からノード B への親近度の解軌道から 45,000 回反復から 46,000 回反復までの区間を抜き出し、拡大してみたものである。

この軌道を見ると、解軌道は**酔歩**（あるいは**乱歩**）(random walk) あるいは、**ブラウン運動**（Brownian motion) (Brown, 1828) に似ているように見える。

つぎに、われわれの２者関係の２次元系の２つのノードのヒルベルト空間上の座標値そのものの５万回の反復後のそれぞれの解軌道を Figs. 14 及び 15 に示す。

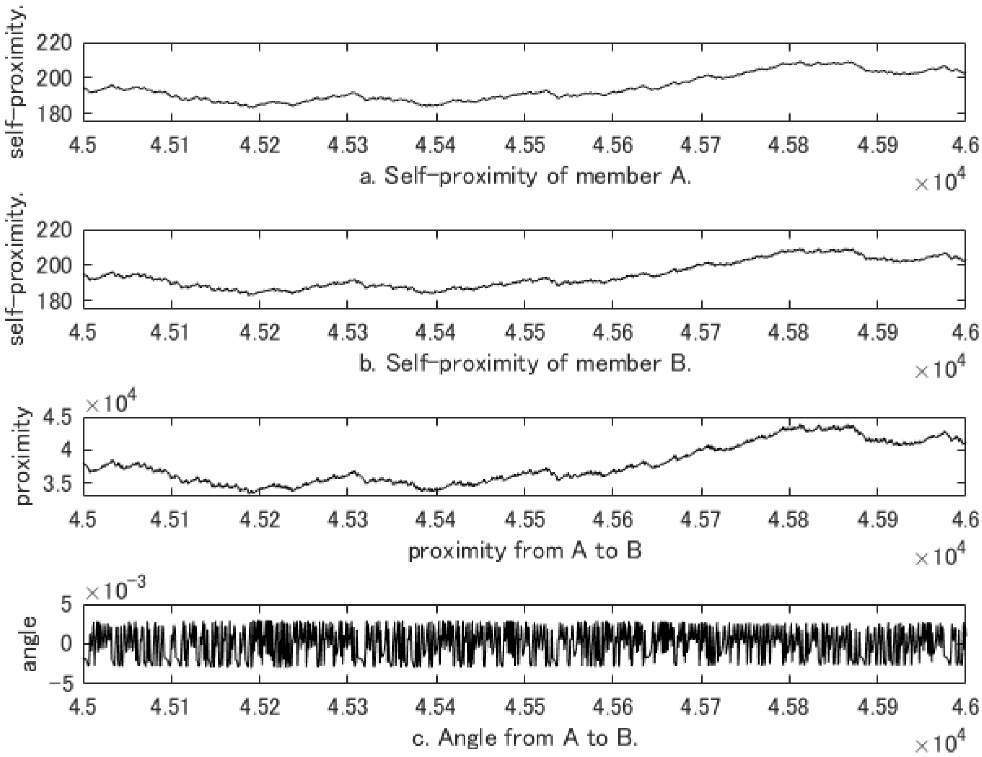

Figure 11. Trajectories of four indices of the original dyadic system. 10-a and 10-b are those of node j (member A) and node k (member B), respectively. 10-c is the trajectory of the proximity from node j to node k. 10-d is the trajectory of the angle from node j to node k.

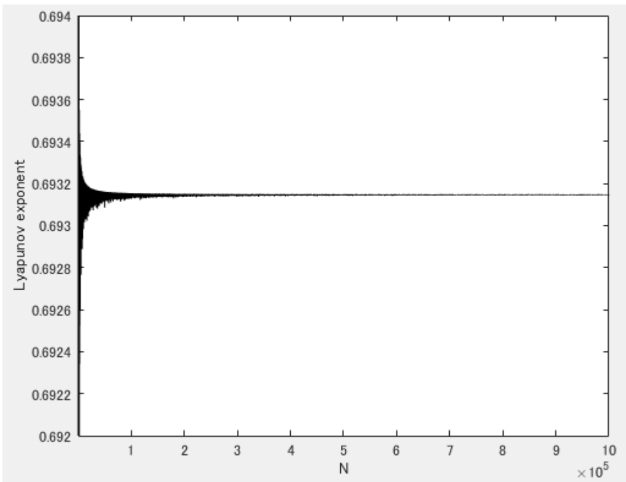

Figure 12. The largest Lyapunov exponent of the original two dimensional system.

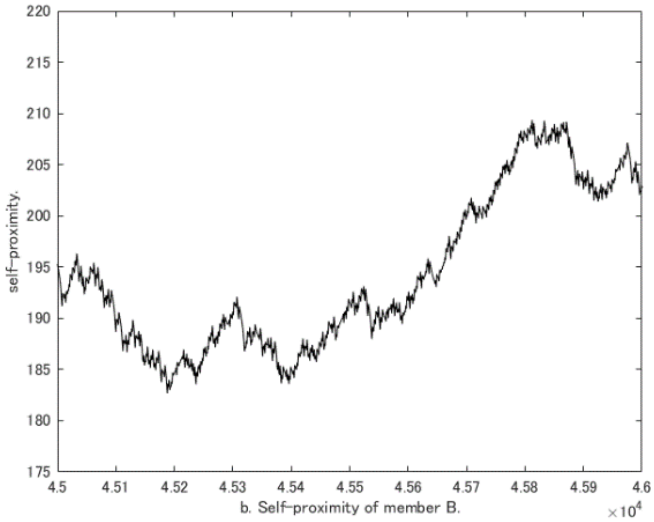

Figure 13.　Expanded trajectories of 10-c from iteration 45,000 to 46,000.

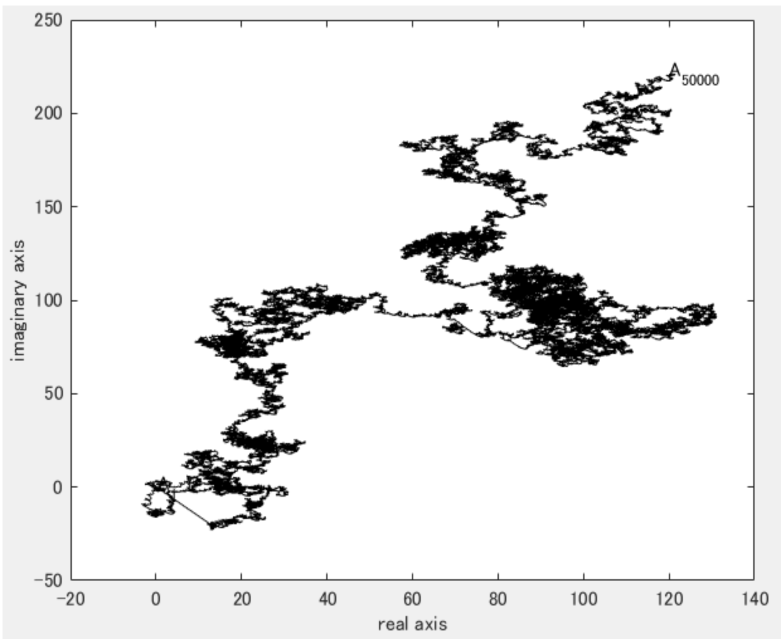

Figure 14.　Trajectory of the node *j* after 50,000 iterations.

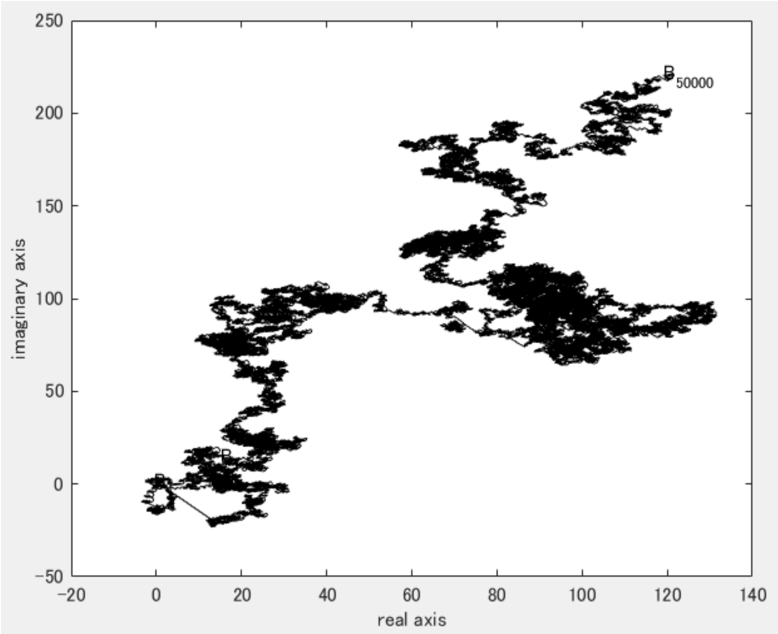

Figure 15.　Trajectory of the node k after 50,000 iterations.

つぎの Fig. 16 はこれら２つの解軌道を同一（複素）平面上に色を変えて出力させたものである。Fig. 14 のノード j の解軌道は黄色で、Fig. 15 のノード k の解軌道は黒で描いた。

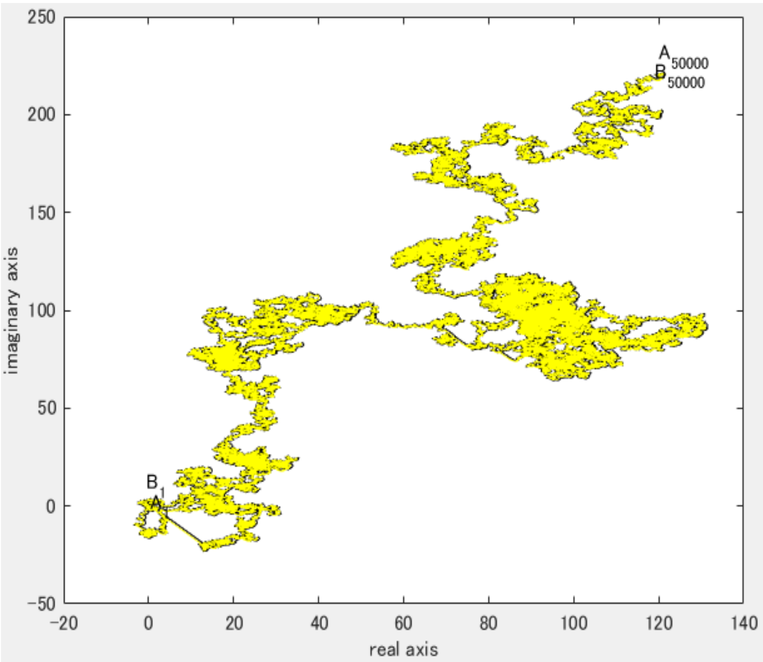

Figure 16.　Simultaneous plot of the two trajectories shown in Figs. 13 and 14.

Fig. 16 を見ると、２つの軌道はほとんど重なっているように見えるが、どの程度の関連が見られるかを**相互相関係数**（cross-correlation coefficient）を用いて検討すると、Fig. 17 のようになった。これを見ると、両者の軌道は、タイムラグの小さい領域では高い相互相関がみられることがわかる。この点は、ノード間に相互作用を仮定しているわれわれのモデルでは相互作用の程度にも依存しようが自明のように思われるが、通常の酔歩やブラウン運動とは異なる。ただし、相互相関は原則として定常過程を仮定しているので、この系に対しては十分適切とは言えないであろう。

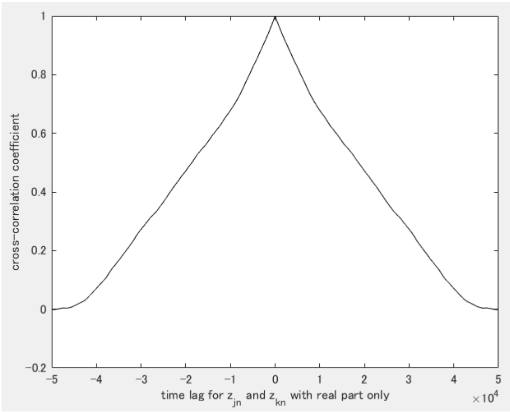

Figure. 17.　Cross-correlation of the two trajectories shown

ここで、参考がてら、われわれの２者関係の２次系のヒルベルト空間上での２者の解軌道と酔歩やブラウン運動の解軌道とを比較するために、まず Fig.18 と 19 に単純酔歩とブラウン運動の１次元目の解軌道を、Fig. 20 と 21 に２次元の単純酔歩とブラウン運動の解軌道を、それぞれ示す。

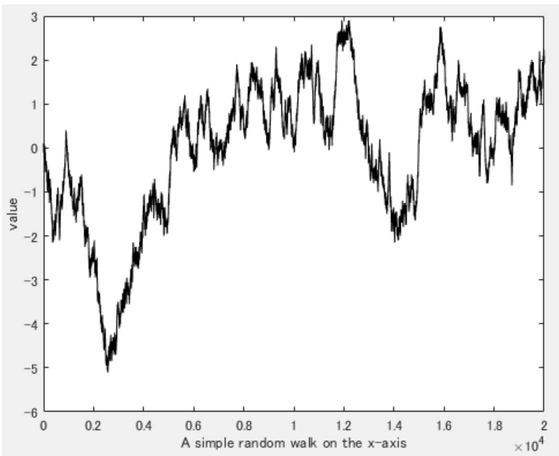

Figure 18.　Trajectories of a simple random walk on the x-axis after 20,000 iterations

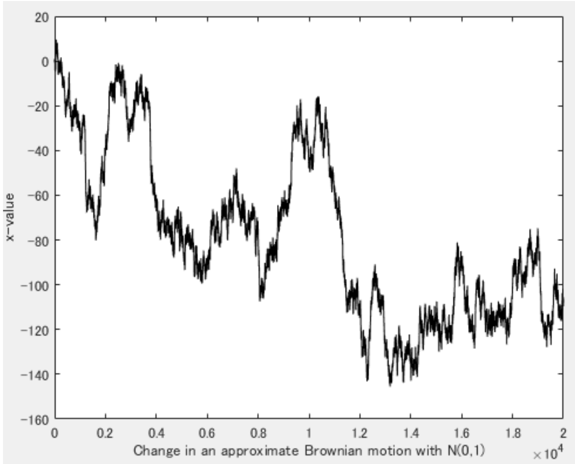

Figure 19.　Trajectory of a　Brownian　motion after 20,000 iterations.

これらの図を比較すると、われわれの２者関係の２次元系の解軌道は、酔歩やブラウン運動によく似ているが、明らかに異なる点がある。というのは、２者関係の２次元系はカオスなので、解軌道は発散しないはずである。一方、酔歩でもブラウン運動でも、反復を重ねるとその分散は発散することが知られている。

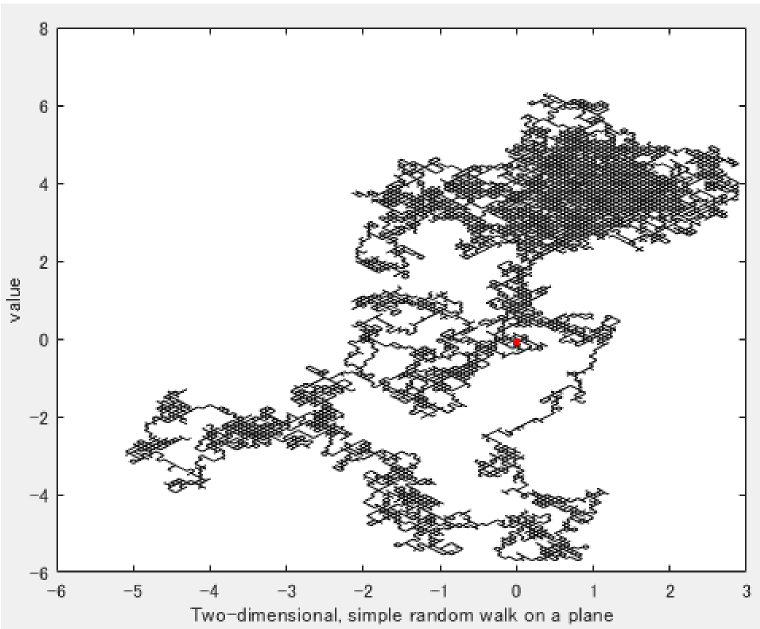

Figure 20.　Two-dimensional simple random walk after 20000 iterations.

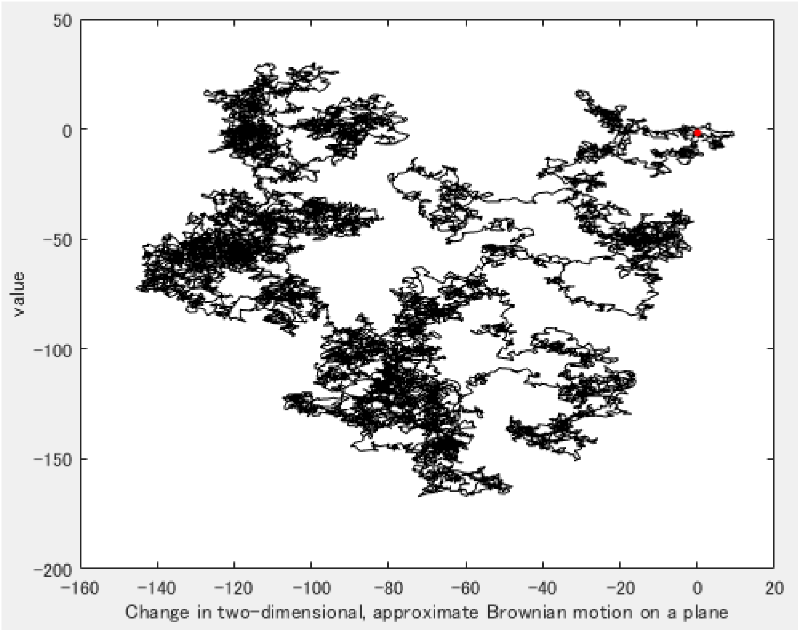

Figure 21.　Planar Brownian motion after 20000 iterations.

いずれにせよ、われわれの２者関係の２次元系のような単純な関係でさえ、場合によっては２者関係が上記の酔歩やブラウン運動に似た振る舞いが理論的に起こる可能性があることは興味深い。

最後に、今回の２者関係の２次元系の解軌道に関する Fig. 11 の４種類の時系列に対して、定常性を必ずしも仮定しない樋口の方法（Higuchi's method）を適用したところ、最初の３つについては樋口のフラクタル次元 D_Hは、順に 1.481, 1.496, 1.469 となり、共にフラクタルと言える。一方、最後の２者間の角度時系列については、同次元は 1.959 であり、フラクタル性は弱いことがわかる。

付録１．Dynamical weighted digraph と、その他の差分力学系モデルとの比較

（１）McCann et al. (1998) の food-web model の例

Fig. 22 は、6 種の食物網（food-web）の構成を示す。この図で、R は資源（動物）密度（resource density）、C_1 は第 1 消費（動物）種密度（the density of the first consumer species）、C_2 は第 2 消費（動物）種密度（the density of the second consumer species）、P は最上位捕食者（top predator）を指す。また、図中、Ω_{ij} は種 i の消費資源種 j に対する選好度（分数）を指す。６種の構成の違いは、この選好度をどのように仮定するかによる。

McCann et al. (1998) は、４変数 R、C_1、C_2、P からなる状態空間での非線形１次微分方程式系を考え、選好度をもとにした種間の**相互作用強度**（interaction strength)を定義し、それ（正確には、相互作用強度の比）を分岐パラメータとしたシミュレーションを行っている。

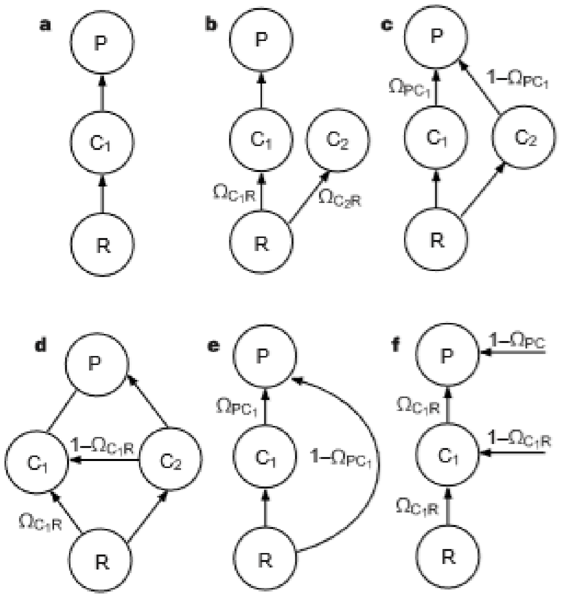

Figure 22. The six food-web configurations studied are: **a**, a simple food chain, **b**, a food web with multiple intermediate consumers (exploitative competetion), **c**, a food web with the top predator feeding on two intermediate consumers (apparent competition), **d**, a food web with consumer 1 feeding on the basal resource and on the second consumer (intraguild predation), e, a food chain including omnivory, and f, a food chain with external inputs. This figure was copied from McCann et al. (1998).

一方、Fig. 23 は上記モデルのシミュレーションの結果で、横軸には相互作用強度の比を、縦軸には最上位捕食者密度 P の局所的最小値 P_{min} と同最大値 P_{max} を取っている。相互作用強度を変えていくと、Fig. 22 の幾つかの食物網構成の時に、例えば、Fig. 23a では相互作用強度が小さいところで、カオスが起こっていることが見て取れる。

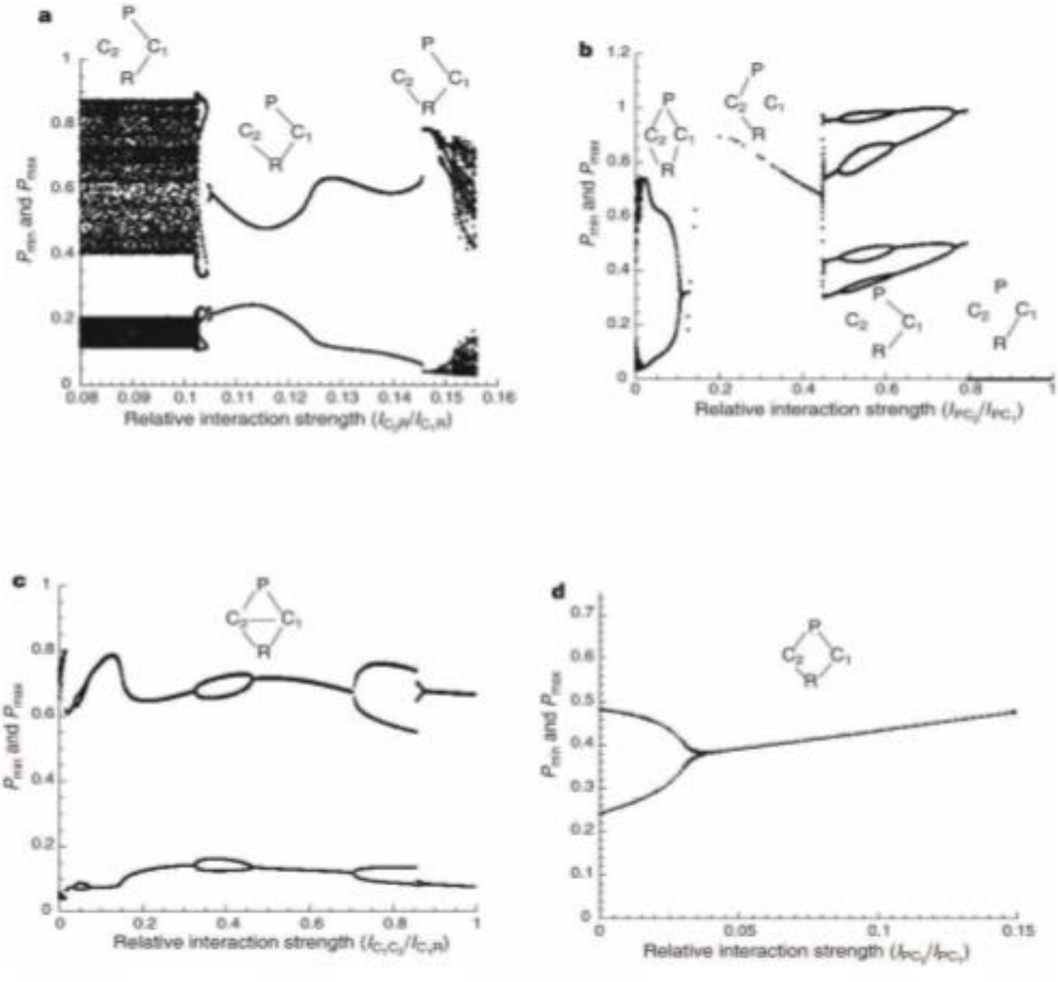

Figure 23. The local minima and maxima for top predator density, P, attained in the attracting solutions for a range of relative interaction strengths. Food-web configurations are given as a function of the relative interaction strengths. Whenever the configuration lacks an explicit link between a species and the rest of the connected web this implies that the species cannot persist. **a**, Exploitative competition. **b**, Apparent competition. **c**, Intraguild predation. **d**, The configuration used in **b**, starting with a limit cycle solution (I_{C_2R}/I_{C_1R}=0.62). This figure was copied from McCann et al. (1998).

（２）recurrent neural network model の例

ここでは、artificial neural networks モデル、とりわけ recurrent neural network モデルの標準的な例を Fig.24 に挙げる（Goodfellow et al., 2016）：

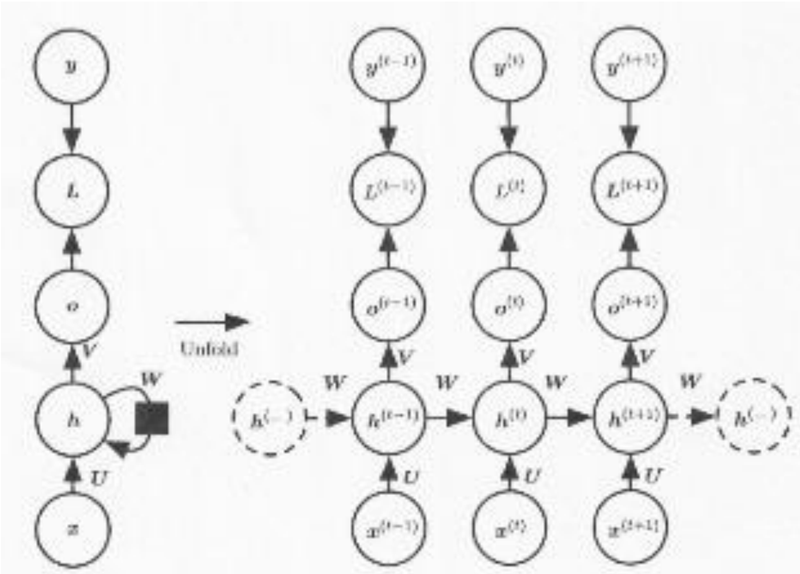

Figure 24. A general recurrent neural network model, which Maps an input sequence of **x** values to a corresponding sequence of output **o** values. A loss L measures how far each **o** is from the corresponding training target **y** when using softmax outputs. The loss L internally computes $\hat{\boldsymbol{y}} = softmax(\boldsymbol{o})$ and compares this to the target **y**. The black square indicates a delay of a single time step. This figure was reproduced from Goodfellow et al. (2016, p.369, Figure 10.3).

この図の表現を数式で記述すると、つぎのようになる。tanh は双曲線正接 (hyperbolic tangent)、softmax は、ソフトマックス関数である：

$$\boldsymbol{h}^{(t)} = \tanh\left(\boldsymbol{a}^{(t)}\right), \tag{A.1}$$

$$\boldsymbol{a}^{(t)} = \mathbf{b} + \mathbf{W}\boldsymbol{h}^{(t-1)} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(t)}, \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{o}^{(t)} = \mathbf{c} + \mathbf{V}\boldsymbol{h}^{(t)}, \tag{A.3}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}^{(t)} = softmax\left(\boldsymbol{o}^{(t)}\right). \tag{A.4}$$

ここで、(A.1)式と(A.2)式を一緒にすると、

$$\boldsymbol{h}^{(t)} = \tanh\left(\mathbf{b} + \mathbf{W}\boldsymbol{h}^{(t-1)} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(t)}\right). \tag{A.5}$$

(A.5) 式は、状態変数 $\boldsymbol{h}$ に関する１つの再帰型非線形差分方程式系を表している。

この神経回路網は、教師あり学習（supervised learning）で隠れ層 (hidden layer) のユニット間にはフィードフォワード伝搬が仮定されたものである。この種の回路網では、回路網の出力を教師信号にフィットさせることに主眼があり、状態変数 **h** の力学的特性の議論がなされることは少ないようである。

（３）<u>Albers et al. (1998) の artificial neural network model の例</u>

このモデルは、数式表現では、つぎのように書かれる：

$$y^{(t)} = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \, tanh\left(s\omega_{i0} + s\sum_{j=1}^{d} \omega_{ij} y^{(t-j)}\right), \tag{A.6}$$

この式で、まず

$$y^{(t)} = \mathrm{f}\left(y^{(t-1)}, y^{(t-2)}, \dots, y^{(t-d)}\right), \tag{A.7}$$

とおく。つぎに、N をニューロン数として、

$$h_i^{(t)} = \tanh\left(a_i^{(t)}\right), \qquad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{N}, \tag{A.8}$$

$$a_i^{(t)} = s\omega_{i0} + s\sum_{j=1}^{d} \omega_{ij} y^{(t-j)}, \qquad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{N}, \tag{A.9}$$

$$y^{(t)} = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \, h_i^{(t)}, \tag{A.10}$$

と書くことにする。

こうすると、(A.8) 式から (A.10)式は、少なくとも形式的には、前頁の recurrent neural network model の例の数式の中の (A.1) 式から (A.3) 式に順に対応していることがわかる。そうすると、(A.10) 式の $y^{(t)}$ は、系の出力のようにも見える。**しかし、Albers et al. (1998) は、(A.7) 式からこの系が *d* 次元状態変数からなる差分系とみて、その力学的特性を検討している。**

その結果、彼らは、例えば N=4 で d=4 の場合この系の分岐パラメータ *s*（scaling factor）を変えていくと、（この４次元系では）ロジスティック写像の場合のような固定点やカオスが出現することを示した（Fig. 25）。

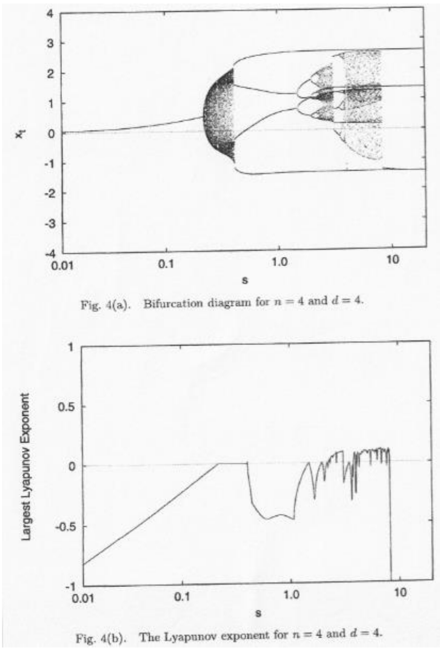

Figure 25. Bifurcation diagram (Fig. 4(a)) and Largest Lyapunov exponent Against the bifurcation parameter *s* (scaling factor in this model). These figures are the copies of Figs. 4(a) and 4(b) of Albers et al. (1998).

付録２． Chino and Shiraiwa (1993) のエルミート形式モデル (Hermitian Form Model, 略して HFM) の解の布置 (configuration) の解釈の仕方について

一般に N 個（人、モノ、国、ニューロンなど）の対象相互の親近度をその要素とする N 行 N 列の非対称親近度行列 S をわれわれが手にして、これをエルミート化、すなわち、

$$\mathbf{H} = (\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}^t)/2 + i\,(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}^t)/2, \tag{A.11}$$

したとき、親近度が比尺度 (ratio scale) で測定されているとすれば、行列 **H** が正定値行列（行列 **H** の固有値がすべて正のような行列）であれば Chino-Shiraiwa の定理により、N 個の対象は(一般に p 次元)複素ヒルベルト空間 (p-dimensional complex Hilbert space) に埋め込むことができる。ここで、式中、右辺の i は純虚数である。

ここで、最大固有値が他に比べて大きい場合は、われわれは対象を 1 次元ヒルベルト空間（これは複素平面と考えてよい）に埋め込める。さらに、複素平面は横軸に実数を（つまり実軸)、また縦軸に純虚数 (pure imaginary number) を（つまり虚軸)、それぞれ充てることにより、形式的には実 2 次元平面と同一視できることに注意したい。

ちなみに、本文中の Fig.2 から Fig.4 では、対象のある時点の布置のみならず、布置を構成する各対象（ノード）それぞれが時間的に動いた軌道まで示してあるが、これらの平面はすべて複素平面（正確には 1 次元ヒルベルト空間）である。

なお、本文 9 頁の（7）式

$$s_{jk} = -\tfrac{1}{2}\left\{\left\|\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_k\right\|^2 + \left\|\boldsymbol{v}_j - i\boldsymbol{v}_k\right\|^2\right\} + \left(\left\|\boldsymbol{v}_j\right\|^2 + \|\boldsymbol{v}_k\|^2\right),$$

は、p-次元複素ヒルベルト空間上の 2 点の座標ベクトル（多次元なので、座標値は一般に複素スカラーではなく複素ベクトルとなる）$\boldsymbol{v}_j$ と $\boldsymbol{v}_k$ から、対象 j から対象 k への親近度（したがって、実数）を求める公式である。

この式で p=1 すなわち一次元複素ヒルベルト空間の場合、複素ベクトル $\boldsymbol{v}_j$ と $\boldsymbol{v}_k$ は 1 次元の複素ベクトル、すなわちスカラーとしての複素数 v_j と v_k になるので、**この空間を実 2 次元ユークリッド空間とみなして座標表現すると**、上記親近度行列の最大固有値を λ と書けば、上式は、実数値の平面座標表現をつぎのように

$$v_j = x_{j1} + i\,x_{j2} \equiv \boldsymbol{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}),\ v_k = x_{k1} + i\,x_{k2} \equiv \boldsymbol{x}_k = (x_{k1}, x_{k2})$$ と書けば、

$$s_{jk} = \lambda\,(x_{j1}x_{k1} + x_{j2}x_{k2}) + \lambda\,(x_{j2}x_{k1} - x_{j1}x_{k2}), \tag{A.12}$$

式と書ける。さらに、この式は、三角関数表現をすれば、

$$s_{jk} = \lambda \left|\boldsymbol{x}_j\right|\left|\boldsymbol{x}_k\right|\left(\cos\theta_{jk} - \sin\theta_{jk}\right), \tag{A.13}$$

そこで、

$$s_{kj} = \lambda \left|\boldsymbol{x}_j\right|\left|\boldsymbol{x}_k\right|\left(\cos\theta_{jk} + \sin\theta_{jk}\right), \tag{A.14}$$

ここで、(A.13) 式及び (A.14) 式の右辺の $\boldsymbol{\theta_{jk}}$ は、複素平面もしくは実２次元平面上での対象 j 及び k の位置座標をベクトルの終点とする**２つのベクトルの角度**であり、通常角度の測り方は平面上での反時計回りとなる。さらに、複素ヒルベルト空間の場合、$\lambda > 0$ であることに注意しよう。

(A.13) 式と (A.14) 式の $\boldsymbol{s_{jk}}$ **と** $\boldsymbol{s_{kj}}$ **を** $\boldsymbol{\lambda = |x_j| = |x_k| = 1}$ **の特別な場合にプロットすると、Fig. 26 の図が得られる**。**このケースは、１次元ヒルベルト空間で、２つの対象 j と k は、共に原点を中心とする単位円周上にある場合である**：

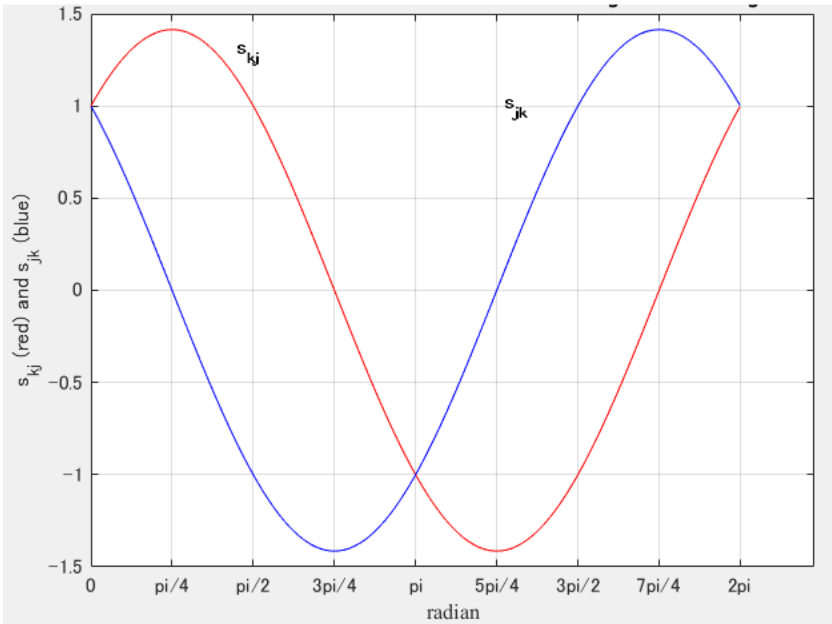

Figure 26. Fundamental relations between the proximity value and the angle defined counterclockwise from one node to the other in HFM.

このとき、２つの対象 j 及び k は、例えば青の関数の変域（ラジアンで測る角度）が０から π/4 (90 度) ということは、角度の測り方の定義からは、単位円周上で対象 j の位置をどこかに固定した時、対象 k は、対象 j の位置から単位円周上で反時計回りに動かすときの角度（x 軸、あるいは実軸の座標値）が 0 から π/4 の範囲の何処かに位置することを意味する。そして、このとき s_{jk} の値（y 軸、あるいは虚軸の座標値）は（Fig.24 の縦軸の値であり）、１から徐々に小さくなり、x 軸の値が π/4 の時０となる。一方、この時 s_{kj} の値は、同図から、角度が０から π/4 (90 度) に近づくと、次第に大きくなり π/4（９０度）で最大値 1.4142… となる。

つぎに、本文中に既に取り上げた Fig. 5 を、これらの情報をもとに解釈してみよう。例えば、Fig. 5a（再掲載）は、３者の初期布置でいわゆる三すくみ（tripartite deadlock）の状態を示す。この場合、３者間の角度は反時計回りに見て、すべて同じで 2π/3 (120 度) である。そこで、うえの Fig. 24 の横軸の 2π/3 (120 度) に対応する値を見ると、3π/4 (135 度) の近くなので、対象 j (Fig. 5a では、A と表記)から対象 k（Fig. 5a では、B と表記）に対する親近度はマイナス（$s_{jk} < 0$）、対象 k (Fig. 5a では、B と表記)から対象 j (Fig. 5a では、A と表記）に対する親近度はプラス（$s_{kj} > 0$）であることがわかる。Fig. 5a では、この関係がすべての隣接する２者関係で成り立っているので、この場合の３者関係には三すくみの状態が成立しているといえる。

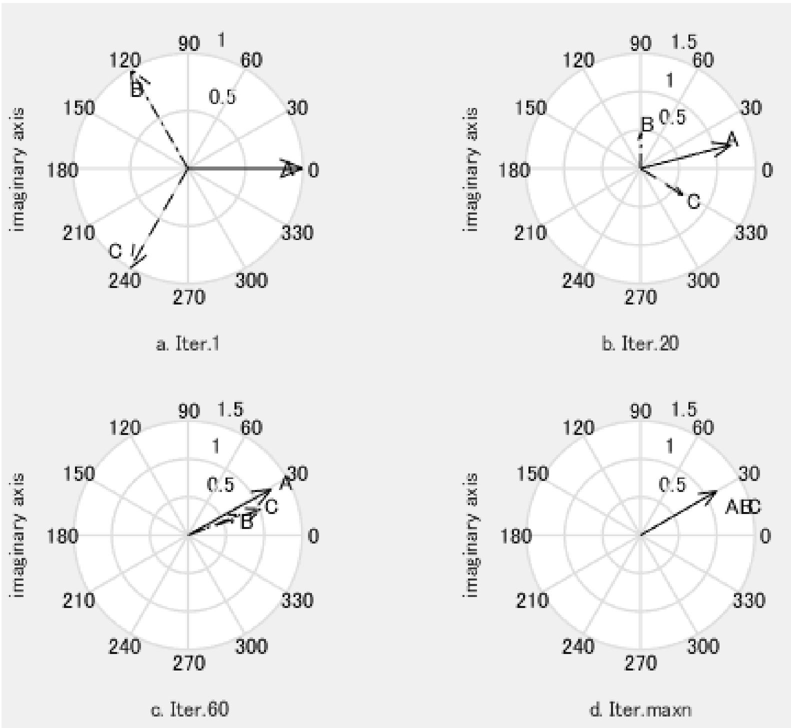

Figure 5. Configurations of nodes as snapshots of their trajectories.

一方、Fig. 5d のような関係では、３者は１点になっているが、このような場合のすべての２者間の（１次元複素）ヒルベルト空間上では、Fig. 24 の角度はゼロなので、すべての２者間の親近度はポジティブで、かつ同一の値となる。

付録３．対称 MDS と非対称 MDS の例と考え方および出力結果の例

この節では、５０年代に Torgerson (例えば、Torgerson, 1958) がその基礎を固めた（対称) MDS と７０年代後半に Gower（1977）や Chino(1978) に始まる非対称 MDS の例と考え方、および１，２の出力結果を紹介する。これらの理論の詳細は、例えば Torgerson (1958）、Chino (2012) や千野（2012）を参照のこと。

１）（対称）MDS

（対称 MDS）は、観測された複数の対象間の距離（数学的な距離は通常２つの対象間で定義されるとき、どちらの対象から見ても同じ、すなわち対称）もしくは、同じく観測された対象間の類似度から推定される距離データをもとに、距離データの情報が可能な限り再現できるような対象間の布置（通常、ユークリッド空間上の点として表される）を推定する方法である。

著名な例として、Kruskal and Wish (1978) の米国の１０都市間の距離データがある。

Table 2. Flying mileages between ten U.S. cities. This figure is reproduced from SAS version 8 manual.

Atl	Chi	Den	Hou	LOS	Mi	NY	San	Sea	Was	
0										Atlanta
587	0									Chicago
1212	920	0								Denver
701	940	879	0							Houston
1936	1745	831	1374	0						Los Angeles
604	1188	1726	968	2339	0					Miami
748	713	1631	1420	2451	1092	0				New York
2139	1858	949	1645	347	2594	2571	0			San Francisco
2182	1737	1021	1891	959	2734	2408	678	0		Seattle
543	597	1494	1220	2300	923	205	2442	2329	0	Washington D.C.

（対称）MDS は、この種の対象間の距離データから出発して、次頁のような対象間の布置（Fig. 27）を求める方法である。なお、このような距離データだと、それから得られる布置は、もともとわかっているが、多くの場合、これは未知である。

（２）非対称 MDS

これに対して、２つの対象間の距離や類似度が必ずしも等しくない、つまり非対称

なデータもいろいろな分野で観測されている。例えば、それらは、片思いなどを含む

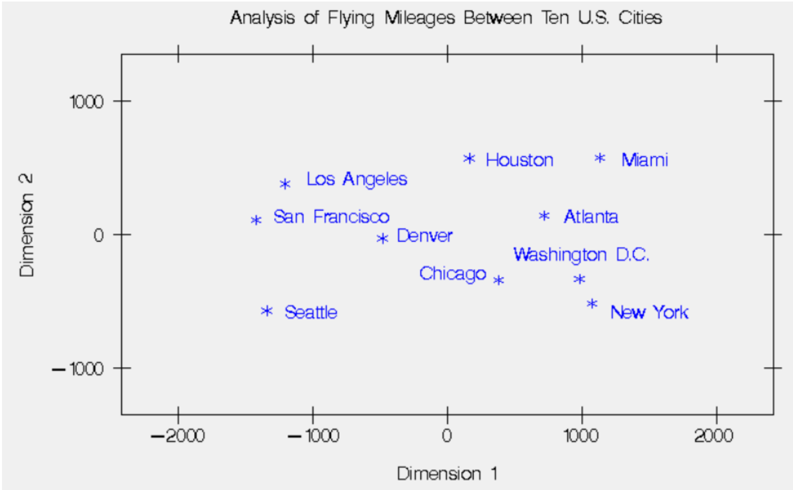

Figure 27.　Output obtained by applying an MDS to the flying mileages between ten U.S. cities.　This figure is reproduced from SAS version 8 manual.

ソシオメトリックデータ、各国間貿易データ、モールス信号の混同行列、サンゴ礁の群落間の勢力の非対称データ、ブランドスイッチングデータ、単語連想データ、社会階層間移動データ、脳神経系の非対称なシナプス間結合、非対称な伝染病ネットワーク、などである（例えば、千野、 2012)。それらのうちの２，３をあげたのが、本文中の Table 1 や、以下の Table 3, 4, 5 である。Table 3 のソシオメトリックデータでは、例えば成員１は５をやや好きであるが、成員５は１を大嫌いという非対称な関係となっている。

Table 3.　A sociometric data of 10 students in a senior-high school at a time gathered by Chino (1978).　This figure is reproduced from Chino (1997).

評定者＼被評定者	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	3	4	3	5	5	6	4	7	7
2	2	3	4	6	7	6	5	5	4	5
3	4	4	3	5	5	4	4	3	4	5
4	4	7	6	3	7	7	4	6	4	5
5	1	7	6	7	4	7	6	6	6	5
6	4	5	4	6	5	7	4	4	4	4
7	4	5	4	4	3	3	6	6	4	6
8	2	4	4	4	5	4	5	2	4	4
9	6	5	5	5	5	6	5	5	4	6
10	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4

(Chino (1978) のデータの一部)

つぎの Table 4 は、Chadwick-Furman and Rinkevich (1994) によるあるサンゴ礁の群落間の勢力の強弱の順序構造（1、強い； 0、弱い）を示している。

Table 4. The ordinal structure of the strength of the eight colonies of a coral reef gathered by Chadwick-Furman and Rinkevich (1994). This table is reproduced from their paper, which is cited elsewhere (Chino, 2012).

f\t	A	B	C	D	E	F	G	M
A		1	1	1	1	1		
B					1	1	1	1
C				1		1		1
D		1						
E				1		1		1
F		1		1				
G	1		1	1	1	1		
M			1			1		

Table 5 は Rothkopf (1957) の 36 個のモールス信号の混同行列を Shepard (1963) が分析したものである。数値は、先に送られる行信号に対して後に送られる列信号がどの程度混同されるかの観測比率（%）である。また、行列内の対角要素（同じ信号間）でも混同が起こる。

Table 5. A confusion matrix of 36 Morse codes gathered by Rothkopf (1957), which was analyzed by Shepard (1963). This table was reproduced from Shepard (1963) as well as Chino (2012).

f\t	A	B	C	···	Y	Z	1	2	···	9	0
A	92	4	6	···	7	3	2	7	···	2	3
B	5	84	37	···	30	42	12	17	···	4	4
C	4	38	87	···	82	38	13	15	···	18	12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
Y	9	23	62	···	86	23	26	44	···	23	16
Z	3	46	45	···	42	87	16	21	···	15	15
1	2	5	10	···	19	22	84	63	···	57	55
2	7	14	22	···	30	13	62	89	···	16	11
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
9	3	14	23	···	21	24	57	39	···	91	78
0	9	3	11	···	15	20	26	17	···	81	94

(Shepard (1963) の Table 1 を改変したもの)

また、Fig. 28 は、このモールス信号データを HCM（HFM）を適用して得られた３６個のモールス信号のヒルベルト空間上の布置である。図中、positive direction は、時計回りで見たある信号から別の信号への混同率の多さを示す。横軸は実軸、縦軸は虚軸を表す。例えば、I (..) を先に S (...) を後に出すと混同されやすく、A (.-) を先に U (..-) を後に出すとやはり混同されやすいといえる。また、互いに近くに位置するI (..)、A (.-) や N (-.) 相互は混同されやすい。

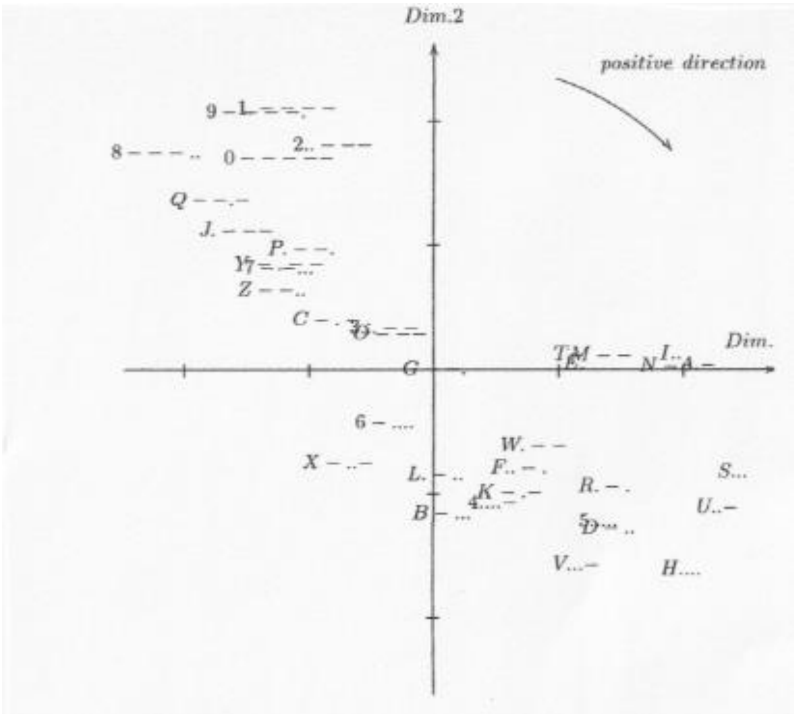

Figure 28.　Configuration of 36 Morse codes in the one-dimensional Hilbert space obtained by applying HCM (HFM) to the confusion matrix of Morse codes.　This figure is reproduced from 千野（2012).

このような対象相互の非対称な関係を分析するモデルは、これまでに数多く提案されているが、ほとんどのモデルは、データとしての対象相互の類似度や非類似度を対象のユークリッド空間上の距離を何らかの形の項を追加し修正する方式を取る（例えば、Gower, 1977; Harshman, 1978; Holman, 1979; Krumhansl, 1978; Okada & Imaizumi, 1987; Saito, 1991; Saito & Takeda, 1990; Weeks & Bentler, 1982)。例えば、Krumhansl (1978) の距離密度モデル（distance-density model）では、対象 i から j 対象への修正された距離を d^*_{ij}、ユークリッド空間上の何らかの距離を d_{ij}とし、対象 i と j それぞれの近くに位置する対象の密度をそれぞれ $\delta(\boldsymbol{x}_i)$、$\delta(\boldsymbol{x}_j)$とすると、

$$d^*_{ij} = d_{ij} + \alpha\delta(\boldsymbol{x}_i) + \beta\delta(\boldsymbol{x}_j), \qquad \text{(A3-1)}$$

と仮定する。

しかし、このような修正後の距離 $\boldsymbol{d}_{ij}^{*}$ は、d_{ij} と異なり、距離空間の公理を満たしていない。これに対して、千野らの HFM は観測される対象間の類似度（親近度）は距離空間の公理を満たすヒルベルト空間上の対象の位置の関数として表現される（本文中の、(7) 式参照）。

最後に、本文中の２つの行列、重み行列と対応するエルミート行列の関係について述べる。ここで、重み行列を $\boldsymbol{W}$、対応するエルミート行列を $\boldsymbol{H}$ と書くことにする。通常、行列 W は観測されるノード間の結合の強さ W_{ij} をその第 i 行第 j 列要素とする行列であり、実数からなる。一方、行列 $\boldsymbol{H}$ は千野のモデルでは、重み行列をつぎのように変換したもので、その要素 H_{ij} は実数ではなく複素数である：

$$\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}^{t})/2 + i\,(\boldsymbol{W} - W^{t})/2. \qquad \text{(A3-2)}$$

この式を、行列表現ではなく、スカラー表現（通常の数値表現）すると、

$$H_{ij} = (W_{ij} + W_{ji})/2 + i\,(W_{ij} - W_{ji})/2. \qquad \text{(A3-2)}$$

ここで、上式の右辺の i は、純虚数を表す。これより、実数からなる重み行列と複素数からなるエルミート行列には一対一の関係があることがわかる。

References

Albers, D. J., Sprott, J. C., & Dechert, W. D. (1998). Routes to chaos in neural networks With random weights. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **7**, 1463-1478.

Bang-Jensen, J. & Guttin, G. (2007). *Digraphs—Theory, Algorithms and Applications*. New York: Springer-Verlag.

Brown, R. (1828). A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827 on the particles contain-ed in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. http://sciweb.nybg.org/science2/pdfs/Brownian.pdf.

Carlesson, L. & Gamelin, T. W. (1993). *Complex dynamics*. New York: Springer-Verlag.

Chesson, P. L. & Warner, R. R. (1981). Environmental variability promotes coexistence in lottery competitive systems. *American Naturalist*, **117**, 923-943.

Chino, N. (1978). A graphical technique for representing the asymmetric relationships between *N* objects. *Behaviormetrika*, **5**, 23-40.

Chino, N. (2012). A brief survey of asymmetric MDS and some open problems. *Behavior-*

metrika, **39**,127-165.

千野直仁 (2012). 非対称 MDS の理論と応用　現代数学社

Chino, N. (2017a). Dynamical scenarios of changes in asymmetric relationships on a Hilbert space. Proceedings of the 45th Annual Meeting of the Behaviormetric Society, September 1, Shizuoka, Japan.

Chino, N. (2017b). Dynamical scenarios of changes in asymmetric relationships over time (1). *Bulletin of The Faculty of Psychological & Physical Science*, **13**, 23-31.

Chino, N. (2018). Dynamical scenarios of changes in asymmetric relationships over time (2). *Journal of the Institute for Psychological and Physical Science*, **10**, 7-14.

Chino, N. & Shiraiwa, K. (1993). Geometrical structures of some non-distance models for asymmetric MDS. *Behaviormetrika*, **20**, 35-4.

Chino, N. & Shiraiwa, K. (1993). Geometrical structures of some non-distance models for asymmetric MDS. *Behaviormetrika*, **20**, 35-4.

Elaydi, S. N. (2000). *An introduction to difference equations*. New York: Springer-Verlag.

Gower, J. C. (1977). The analysis of asymmetry and orthogonality. In J. R. Barra, F. Brodeau, G. Romer, & B. van Cutsem (Eds.), *Recent Developments in Statistics* (pp.109-123). Amsterdam: North Holland.

Harshman, R. A. (1978). Models for analysis of asymmetrical relationships among *N* objects or stimuli. *Paper presented at the First Joint Meeting of the Psychometric Society and the Society for Mathematical Psychology*, Hamilton, Canada.

Higuchi, T. (1988). Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica D*, **31**, 277-283.

Krumhansl, C. L. (1978). Concerning the applicability of geometric models to similarity data: The interrelationship between similarity and spatial density. *Psychological Review*, **85**, 445-463.

Kruskal, J. B., & Wish, M. (1978). *Multidimensional Scaling*. Newbury Park: Sage Publications.

McCann, K., & Hastings, A. & Huxel, G. R. (1998). Weak trophic interactions and the balance of nature. *Nature*, **395**, 794-798.

Milnor, J. (2000). *Dynamics in one dimensional complex variable*. Braunschweig: Vieweg.

McCann, K., & Hastings, A. & Huxel, G. R. (1998). Weak trophic interactions and the balance of nature. *Nature*, **395**, 794-798.

Okada, A., & Imaizumi, T. (1987). Nonmetric multidimensional scaling of asymmetric proximities. *Behaviormetrika*, **21**, 81-96.

Rothkopf, E. Z. (1957). A measure of stimulus similarity and errors in some paired associate-learning tasks. *Journal of Experimental Psychology*, **53**, 94-101.

Saburi, S. & Chino, N. (2008).　A maximum likelihood method for an asymmetric MDS model.　*Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 4673-4684.

Saito, T. (1991). Analysis of asymmetric proximity matrix by a model of distance and additive terms.　*Behaviormetrika*, **29,** 45-60.

Saito, T., & Takeda, S. (1990). Multidimensional scaling of asymmetric proximity: model and method.　*Behaviormetrika*, **28**, 49-80.

Schepard, R. N. (1963).　Analysis of proximities as a technique for the study of information processing in man.　*Human Factors*, **5,** 33-48.

Torgerson, W. S. (1958).　*Theory and Methods of Scaling*. Wiley, New York.

上田哲生・谷口雅彦・諸澤俊介（1995). 複素力学系序説-フラクタルと複素解析　培風館

Weeks, D. G., & Bentler, P. M. (1982). Restricted multidimensional scaling models for asymmetric proximities.　*Psychometrika*, **47**, 201-208.