

## 正弦波時系列の間引きによる解軌道の特徴について

○ 千野直仁<sup>1</sup>

愛知学院大学心身科学部

2015年12月22日

### 1 正弦波時系列とその間引き

ここでは、正弦波時系列  $x = \sin(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$  を間引きすることを考える。ここで、 $t$  はラジアン単位で与えるものとし、例えばもとの時系列は  $N = 3,000$  で、区間  $t = [0, N]$  を  $0.1$  ラジアンステップで  $30,000$  時点分発生させるとする。

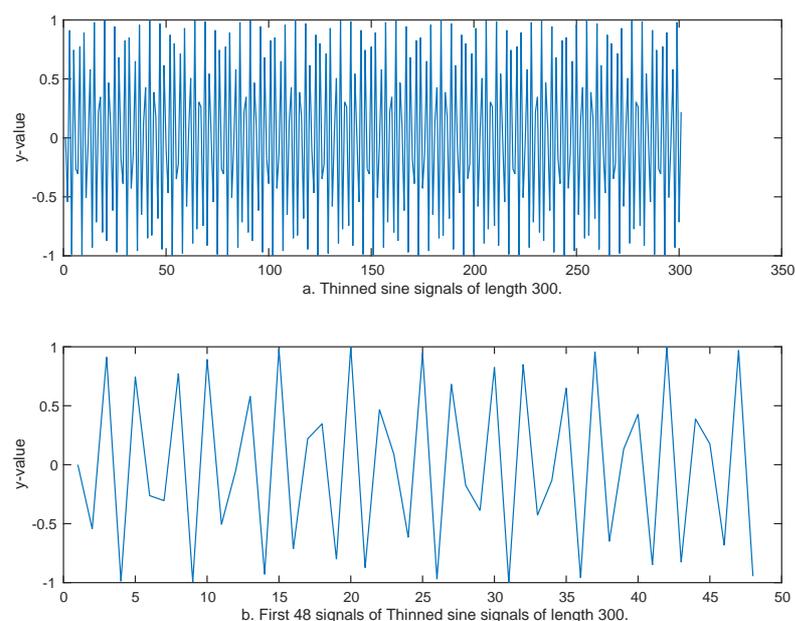


Figure 1: 正弦波の  $1/100$  間引き後の信号とその一部切り出し

この時系列を間引き間隔  $\tau$  で間引いた時系列を 2 次元空間に埋め込むとすれば、

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin(t + \tau), \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots \quad (1)$$

3 次元空間に埋め込むとすれば、

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin(t + \tau), \\ z = \sin(t + 2\tau). \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots \quad (2)$$

<sup>1</sup>このノート作成に当たり、白岩謙一氏より幾つかの貴重な助言を得た。ここに記して謝意を表す。

ここで、 $a = \cos\tau$ 、 $b = \sin\tau$  とおけば、 $a^2 + b^2 = 1$  に注意すると、まず ( 1 ) 式より、

$$x^2 - 2axy + y^2 = b^2. \quad (3)$$

これを行列表現すれば、

$$\mathbf{u}^t \mathbf{A} \mathbf{u} = b^2. \quad (4)$$

ここで、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{A}$  の固有値は  $1 \pm |a|$ 、固有ベクトルは  $x = -y$ 。そこで、座標軸の  $-\pi/4$  の回転を行えば、

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u}^*. \quad (6)$$

ここで、

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

より、( 6 ) 式を ( 4 ) 式に代入して整理し、スカラー表現すれば、

$$(1 + a)x^{*2} + (1 - a)y^{*2} = b^2. \quad (8)$$

このことから ( 3 ) 式は楕円の方程式であることがわかる。

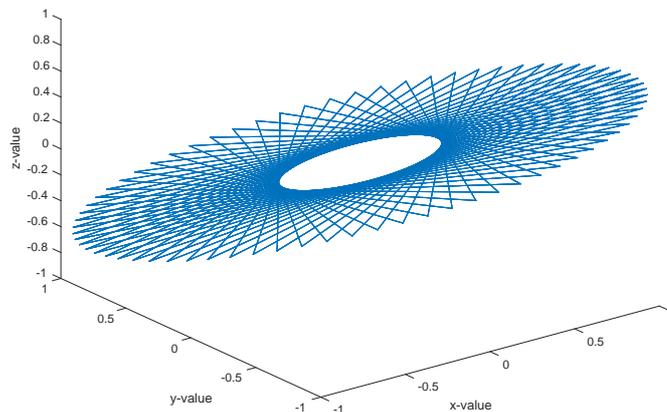


Figure 2: 正弦波の 1/100 間引き後の信号の 3 次元埋め込み結果 (点列の隣接 2 時点間を線分で結んだもの)

同様に、( 2 ) 式の  $z$  の右辺の展開から

$$y^2 - 2ayz + z^2 = b^2. \quad (9)$$

これより ( 9 ) 式は  $(y, z)$  平面上の楕円であることがわかる。

つぎに、(1)式で $\tau = 1$ の時、すなわち間引きをしない場合、時系列信号は正弦波となるが、 $\tau$ を大きくしていくと、時系列は正弦波とは異なるものが得られる。例えば、図1は $\tau = 100$ とした場合の時系列信号を示す。ここで、図1 a は間引き後の信号を、図1 bはその最初の48時点分の信号を示す。

図1 bをみると、間引き後の信号は正弦波とは大きく異なることがわかる。そこで、この信号の位相的特徴を見るために、これを(2)式による3次元空間に埋め込んだのが図2である。

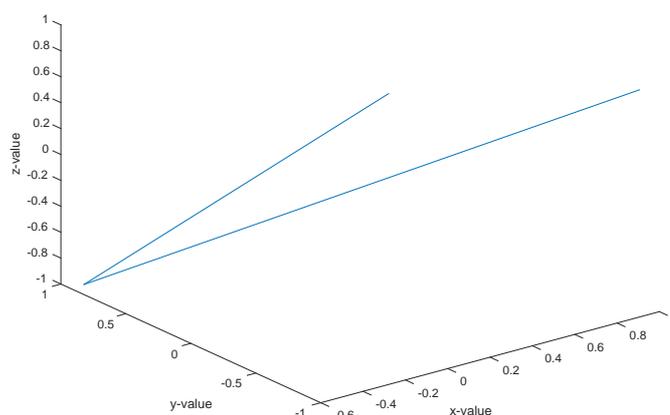


Figure 3: 正弦波の 1/100 間引き後の信号の最初の 3 時点分の 3 次元埋め込み結果 (点列の隣接 2 時点間を線分で結んだもの)

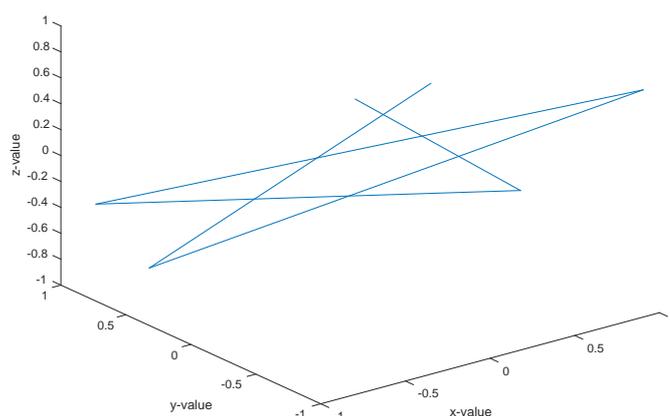


Figure 4: 正弦波の 1/100 間引き後の信号の最初の 6 時点分の 3 次元埋め込み結果 (点列の隣接 2 時点間を線分で結んだもの)

図2の信号は、一見3次元空間上に広がるトーラスのようにもみえるが、この信号

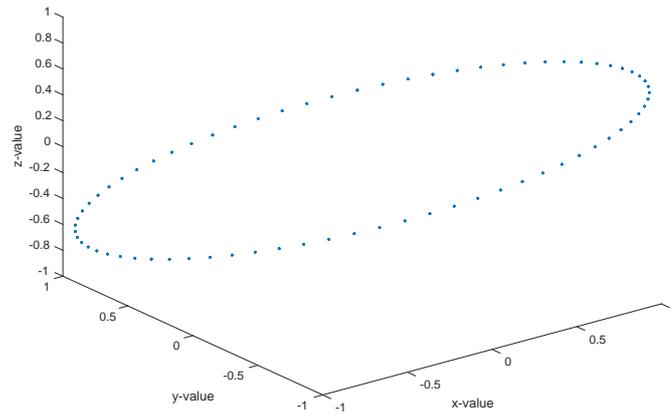


Figure 5: 1/100 間引き後の図 1 の信号の 3 次元空間への埋め込み結果 (点列)

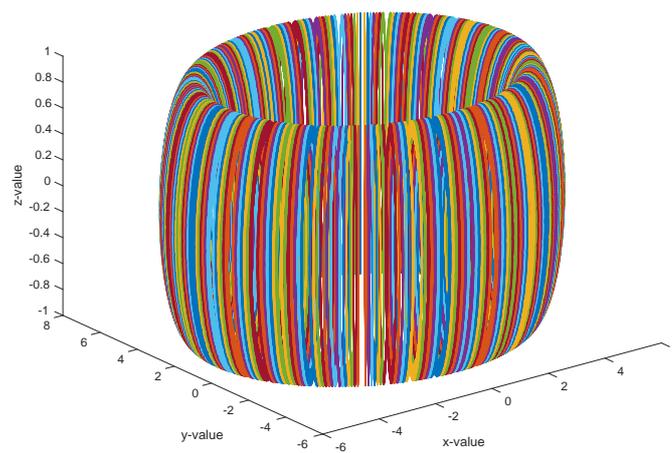


Figure 6: 輪環面 (トーラス)

を3変数からなる多次元データと見て主成分分析を行うと、3番目の固有値はゼロであるので、この信号は2次元の広がりしか持たないことがわかる。

そこで、図2の信号の最初の3時点分及び同6時点分のみをプロットして軌道の特徴を調べると、図3及び図4のようになる。

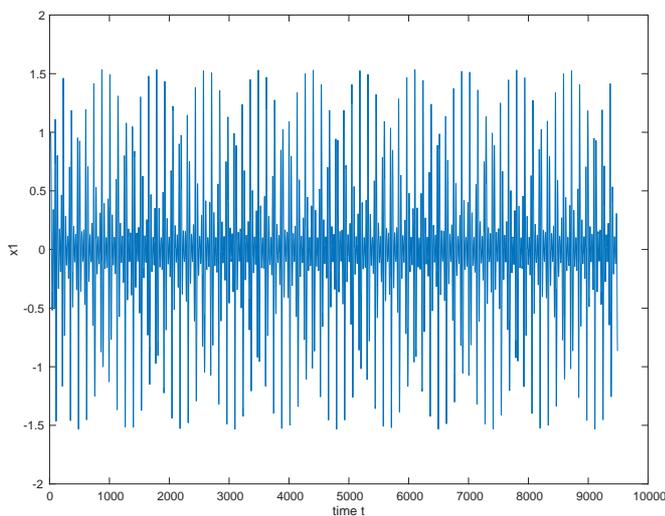


Figure 7: ラングフォード方程式の第1変数の時系列信号

図3、4から、図2の解軌道の外側の境界は図3のような3点を頂点とする無数の3角形により構成される平面上の軌道に外接する楕円であり、内側の境界は同軌道に内接する楕円であるように見える。しかし、この推論は間違いで、解軌道はあくまでも図2の外側の楕円上にある。というのは、図2では解軌道を描くに際して点列の隣接2時点間を線分で結んでいるが、そもそも図2の時系列信号は、その発生させ方からは連続的な信号ではなく離散的な信号である。そこで、解軌道として隣接2時点間を線分で結ばず単に点列として3次元空間に埋め込み表示してみると図5となる。図5からは、解軌道が楕円軌道であることが明らかである。さらに、その解軌道は図2の一見トーラス的な図の外側の境界を結んだものであることも明らかである。結局、図2をMATLABの3次元プロットルーチンplot3で描くに際して、隣接する解軌道を線分で結んだことが間違いのもとであることがわかる。

なお、(株)あいはらのSCT (Sunday Chaos Times)でも解軌道の多次元空間への埋込みに際しては、うえのような例の場合にも隣接2時点間を線分で結ぶので注意が必要である。

## 2 幾何学的トーラスと力学系の軌道としてのトーラス

この節では、2種類のトーラスの例について述べ、第1節での正弦波時系列の間引き後の軌道特性との違いにふれる。

幾何学的トーラスは輪環面とも呼ばれ、3次元空間 $(x,y,z)$ 内の例えば $(x,z)$ 平面の $x$ 軸上で原点から十分離れた位置に中心を持つ円を描き、これを $z$ 軸の周りに回転して

得られる（例えば、小林、p.46）。ここで、円の原点からの距離を  $R$  とし、円を媒介変数表示（動径  $r$ 、偏角  $\theta$ ）し、円の  $z$  軸からの回転角を  $\phi$  とすると、トーラスは、次式で表される：

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \phi, \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \phi, \\ z = r \sin \theta. \end{cases} \quad (10)$$

図6は  $R = 5$ 、 $r = 1$  としてこれを描いたものである。

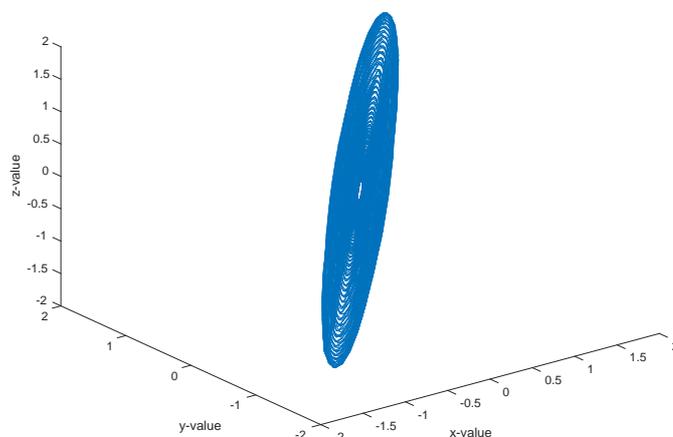


Figure 8: ラングフォード方程式の第1変数の解軌道の3次元埋め込み結果（点列の隣接2時点間を線分で結んだもの）

一方、力学系の解軌道として得られるトーラスの例として、ラングフォード方程式（Langford equation）（Langford, 1984）を見てみよう。この方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (z - B)x - Dy, \\ \frac{dy}{dt} = Dx + (z - B)y, \\ \frac{dz}{dt} = C + Az - \frac{z^3}{3} - (x^2 + y^2)(1 + Ez) + Fzx^3. \end{cases} \quad (11)$$

なる3次元の非線形1階微分方程式系であり、よく知っているようにパラメータ  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  によりトーラスやカオスが得られる。図7は、2-トーラス（準周期解）を生成する  $A = 1$ 、 $B = 0.7$ 、 $C = 0.6$ 、 $D = 3.5$ 、 $E = 0.25$ 、 $F = 0$  の第1変数の解軌道を示す。また、図8はこの第1変数の解軌道を3次元空間に埋め込み、隣接2時点間を線分で結んだものである。これに対して、図9は3変数の解軌道を3次元上に点列として表示したものである。

図8を図2の正弦波の1/100間引き後の信号の3次元埋め込み結果と比較しただけでは、図8の解軌道が3次元的な厚みを持ったものかどうかは判然としない。そこで、まず図2の場合と同様、この解軌道の3次元埋め込みデータを3変数データと見て主成分分析を行うと、その固有値は3つとも正となり、図2とは異なり3次元的な厚みを持つことがわかる。このことは、3変数の解軌道を3次元空間上に表示した図9を見ても確認できる。

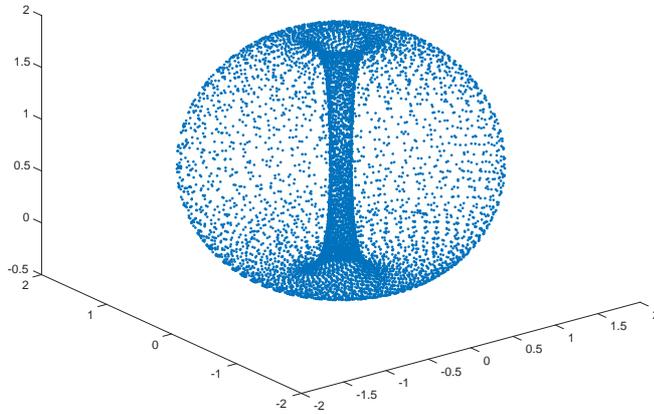


Figure 9: ラングフォード方程式の解軌道のトーラス局面 (点列)

### 3 結論

いずれにせよ、図 2 の正弦波時系列を間引きすることにより得られる、一見 (3 次元の厚みのある) トーラスに見える、第 1 変数の解軌道は、図 9 のラングフォート方程式により得られる 2 次元トーラス (2-torus) と異なり、結局 1 次元トーラス (1-torus) となることがわかる。また、正弦波時系列をどんな間隔  $\tau$  で等間隔に間引いても、その位相は円と同相であることがわかる。

しかし、周期的信号が単純な正弦波のようなものではなく、複数の振幅の波が周期的に繰り返すような信号の場合はどうであろうか。そのような場合、間引き間隔次第では特定の振幅の波がすべてカットされてしまうケースがあるとすれば、間引き前と間引き後で信号の位相は異なったものにならないであろうか。この問題は、古くから知られたナイキストの標本化定理 (the sampling theorem) (Nyquist, 1928) に関係するものと思われる。一方、間引き間隔を等間隔に取らないでランダムに取った場合は、どのような位相になるか予想できない。また、カオス力学系の信号を等間隔で間引くと同相な信号が予想されるが、ランダムに取った場合はやはりどんな位相になるかは予想できない。

#### References

- 小林昭七 (2015). 曲線と曲面の微分幾何 (改訂版) 裳華房
- Langford, W. F. (1984). Numerical studies of torus bifurcations. *International Series of Numerical Mathematics*, **70**, 285-295.
- Nyquist, H. (1928). Certain topics in telegraph transmission theory. *American Institute of Electrical Engineers, Transactions*, **47**, 617-644.